Turk J Engin Environ Sci
24 (2000) , 127 – 133.

Sabit Eksen Etrafında Dönen Esnek Çubuğun Dinamik Davranışının İncelenmesinde İki Farklı Yöntem

Sevda TELLİ, Osman KOPMAZ
Uludağ Üniversitesi Müh.-Mim. Fak. Makine Müh. Bölümü
Görükle, Bursa-TÜRKİYE,

Geliş Tarihi 28.01.1997

Özet

Bu çalışmada tek esnek uzuvlu bir manipulatörde, çubuk titreşimlerinin incelenmesi ve çubuk boyunca sehimlerin hesabında kabul edilmiş modlar (KEM) ve indirgenmiş parametre (İP) modelleri kullanılmış, elde edilen hareket denklemleri 4.mertebeden Runge-Kutta yöntemiyle çözülmüştür. Sonuçlar, sayısal değerler ve elde edilme süreleri açısından karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Esnek Uzuv, Kabul Edilmiş Modlar, İndirgenmiş Parametre.

Two Different Methods to Investigate Dynamic Motion of Flexible Link That Rotates About Fixed Axes

Abstract

In this study, assumed modes and lumped parameter methods are used to investigate the transversal vibrations of a flexible beam rotating around a fixed axis. Equations of motion are solved by using the 4th order Runge-Kutta method. Results are compared in terms of numerical values and solution times.

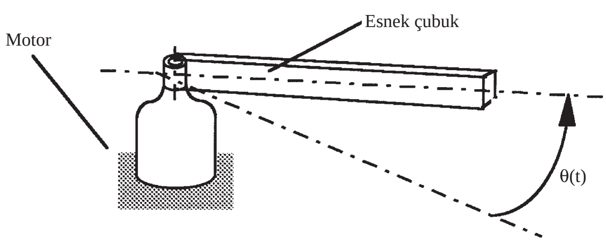
Key Words: Flexible Link, Assumed Modes, Lumped Parameter.

Giriş

Günümüzde sanayinin bir çok dallarında kullanılan mekanizma ve makinelerin işletme hızları giderek arttığı, uzuvlarının daha narin imal edildiği, buna karşılık arzulanan çalışma hassasiyetini de sağlayabildikleri gözlenmektedir. Makine tasarım ve imalatındaki bu değişim ve gelişim esas olarak bilgisayar destekli mühendislik, analiz ve imalat alanındaki gelişmelere dayanmaktadır. Makine uzuvlarının hafif ve narin tasarımı beraberinde titreşim sorunlarını getirmektedir. Titreşim problemlerinin incelenmesinde kullanılan modele bağlı olarak elde edilen hareket denklemlerine -çoğunlukla kısmi diferansiyel denklem şeklinde olanlarına- genel, analitik, kapalı bir çözüm bulmak imkansız olup, sayısal analiz yöntemlerine başvurmak kaçınılmaz olmaktadır.

Bu çerçevede çalışmamızda bir motorla belirli bir hareket kanununa göre döndürülen esnek bir çubuğun dinamik davranışını, daha açık bir ifadeyle titreşimli hareketini incelemekteyiz. Burada ele alınan çubuk, yerine göre bir çubuk mekanizmasının tahrik uzvu, başka bir yerde ise bir robot manipulatörün kolu olarak karşımıza çıkmaktadır. Ele alınan sistem Şekil 1 de şematik olarak gösterilmiştir.

Bu sistemin incelendiği çok sayıda çalışma vardır. Söz konusu çalışmaların bir kısmı sistemin sadece dinamik cevabını belirlemeye yönelik olduğu halde [1,4] , diğer bir kısmında sistemin kontrolü de ele alınmaktadır [2,3,5]. Ne amaçla olursa olsun bu çalışmaların teorik temeli sistemin bir matematik modelinin oluşturulmasına dayanmaktadır. Bu önemli aşamada literatürde genel olarak iki eğilim gözlenmektedir: Ya sistem parametrelerinin yayılı olduğu varsayılmakta, hareket denklemleri modal analize dayalı bazı yaklaşık yöntemlerle (Galerkin, Kabul edilmiş modlar gibi) çözülmekte [1,2,4,5] ya da sistem parametrelerinin sistemin belli nokta veya bölgelerinde yoğunlaştığı varsayılarak bir tür ayrıklaştırma yapılmakta ve bu suretle elde olunan hareket denklemleri analitik veya nümerik yöntemlerle çözülmektedir [3,6]. Her iki durumda da sonsuz serbestlik dereceli bir sistem sonlu sayıda serbestlik dereceli bir sistemle değiştirilmiş olmaktadır.



Şekil 1. Tek Serbestlik Dereceli Esnek Çubuk

Bu çalışmada her iki yaklaşım tarzı -veya çözüm yöntemi- örnek bir sisteme uygulanarak, elde olunan sonuçlar birbirleriyle uyumluluk ve bilgisayar süresi bakımından karşılaştırılmaktadırlar. Modal analize dayalı yöntem olarak kabul edilmiş modlar (assumed modes-varsayılan kipler) ve ayrıklaştırmaya dayalı yöntem olarak indirgenmiş parametre (lumped parameter) yöntemleri kullanılmıştır.

Şekil 1.deki sistemin bazı fiziki özellikleri şunlardır:
Çubuk uzunluğu: L=1,00 m,
Çubuk kesiti:
A=0,00206 m (en) x 0,0254 m (boy) =0,0000523 m^2
Çubuğun elastisite modülü:
E=6,9 10^{10} N/m^2 (Alüminyum)
Çubuk malzemesinin yoğunluğu: ρ=2770 kg/m^3
Kesitin atalet momenti: I=0,0254x$(0,00206)^3$/12 m^4
Çubuğa uygulanan hareket kanunu:

$$\theta(t) = \theta_0(\frac{t}{t_h} - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t}{t_h})(rad)$$

şeklinde olup $\theta_0 = \pi/2$ radyan alınmıştır. Hesaplamalarda t_h hareket süresi 1 saniye ve 1,5 saniye alınarak sonuçlar bulunmuştur. t_h'nin 0,5 saniye alınması halinde ortaya çıkan sehimler her iki yöntemde de hareket denklemlerinin çıkarılmasına temel oluşturan lineer Euler-Bernoulli kiriş hipotezi ile çeliştiği için 1 ve 1,5 saniyelik hareket süreleri seçilmiştir.

Üniform çubuğun bir uçtan motor şaftına ankastre denebilecek bir tarzda bağlandığı kabul edilmiştir. Diğer ucu serbesttir. Bu sınır şartlarına haiz çubuğun ilk üç tabii frekansı ve tabii peryotları, bu sistemin coshλL cosλL = -1 şeklindeki özdeğer denklemi nümerik olarak çözülerek aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Tablo 1. Esnek Çubuğun İlk Üç Tabii Frekansı ve Peryodu

i	ω_i (rad/s)	T_i (saniye)
1	10,43786	0,601961
2	65,412976	0,0960541
3	183,15823	0,0343046

Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

Şekil 1'deki esnek çubuğun hareket denklemini elde etmek için iki ayrı koordinat takımı kullanılmıştır. Bunlardan birincisi XY koordinat takımıdır, diğeri ise eksenlerinden biri (x ekseni) esnek çubuğun şaft tarafındaki ucuna çizilen teğetle çakışık xy eksenidir. XY ve xy nin orijinleri şaft merkezinde alınmıştır. Şaftın yarıçapı, çubuk boyu yanında ihmal edilmiştir. Hareket denklemlerinin çıkarılmasında gerek Lagrange, gerekse Euler-Newton yöntemleri kullanılmış olsa da kesme kuvveti ve kesit dönme eylemsizliklerinin etkisinin göz önüne alınmadığı lineer Euler-Bernoulli elastik eğri hipotezi esas alınmıştır. Burada kısaca kabul edilmiş modlar ve indirgenmiş parametre yöntemlerine ait denklemlerin nasıl çıkarıldığına değinilecektir.

Kabul Edilmiş Modlar Yöntemi ve Hareketin Lagrange Denklemleri

Bu yöntemde Şekil 2'de görüldüğü gibi $u(x,t)$ sehimlerinin,

$$u = u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x) q_i(t) \tag{1}$$

şeklinde bir seri ile temsil edilebileceği kabul olunmaktadır. Burada $\Phi_i(x)$'ler bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuğun sınır şartlarını sağlayan ve şaftın dönmemesi halinde çubuğun özfonksiyonları olan ortogonal fonksiyonlardır. $q_i(t)$'ler ise bu fonksiyonlara (veya bu modlara) karşı gelen genelleştirilmiş koordinatlardır. Sabit XY ve dönen xy takımlarında çubuğun kesit ağırlık merkezleri eksenindeki herhangi bir noktasının hızı,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left\{[-x\cdot\sin\theta + u(x,t)\cdot\cos\theta]\,\dot{\theta} + \dot{u}(x,t)\sin\theta\right\}\vec{I}\\ &+ \left\{[-x\cdot\cos\theta + u(x,t)\cdot\sin\theta]\,\dot{\theta} - \dot{u}(x,t)\cos\theta\right\}\vec{J}\\ &= -u\dot{\theta}\vec{i} + (x\dot{\theta} + \dot{u})\vec{j}\end{aligned} \tag{2}$$

olup, çubuğun kinetik ve potansiyel (ağırlık kuvveti hariç) enerjileri ise:

$$T = \frac{1}{2}\rho A\int_0^L \nu^2(x,t)\cdot dx \tag{3}$$

$$V = \frac{1}{2}EI\int_0^L \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{4}$$

ile hesaplanır. Potansiyel enerjide iç kuvvetler olarak sadece eğilme momentinin işi göz önüne alınmıştır. Gerek kinetik, gerekse potansiyel enerji ifadelerinde ortaya çıkan u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gibi büyüklüklerde (1) ifadesi kullanılır ve $\Phi_i(x)$ fonksiyonlarının ortogonallik özellikleri göz önüne alınırsa

$$T = \frac{1}{2}\rho A\left\{\frac{L^3}{3}\dot{\theta}^2 + \text{-}\sum_{i=1}^{n}(C_{ii}\dot{q}_i^2 - 2B_i\dot{\theta}\dot{q}_i + C_{ii}\dot{\theta}^2 q_i^2)\right\} \tag{5}$$

$$V = \frac{1}{2}EI\sum_{i=1}^{n} q_i^2 D_{ii} \tag{6}$$

eşitlikleri bulunur. Burada,

$$B_i = \int_0^L x\Phi_i(x)dx,$$

$$C_{ii} = \int_0^L \Phi_i^2(x)dx = L,$$

$$D_{ii} = \int_0^L \left[\Phi_i''(x)\right]^2 dx = \frac{\lambda_i^4}{L^3} \tag{7}$$

olup, λ_i ise $\cosh\lambda L\ \cos\lambda L = -1$ denkleminin kökleridir. Denklemlerde "$\cdot$" zamana (t'ye), "$\prime$" ise konuma (x'e) göre türevi göstermektedir. $L = T - V$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1,\ldots,n \tag{8}$$

denklemleri, hareketin Lagrange denklemleridir. Esnek kirişin doğal frekanslarının

$$\omega_i^2 = \frac{\lambda_i^4}{L^4}\frac{EI}{\rho A}$$

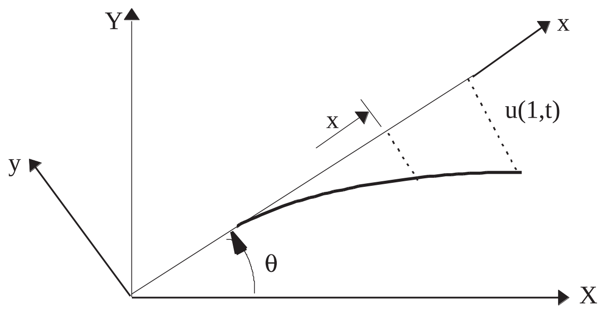
olduğu göz önünde tutulursa (8) denklem takımı açık bir tarzda

$$\ddot{q}_i + (\omega_i^2 - \dot{\theta}^2)q_i = -\beta_i\ddot{\theta} \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ise, ikinci mertebeden, sağ taraflı, birbiriyle bağlı (coupled) bir denklem takımıdır ve nümerik metodlardan biriyle, örneğin çalışmamızda olduğu gibi dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu ile çözülebilir. Burada $\Phi_i(x)$ ler

$$\begin{aligned}\Phi_i(x) &= (\cos\lambda_i x - \cos h\lambda_i x)\\ &- \frac{(\cos\lambda_i L + \cos h\lambda_i L)}{(\sin\lambda_i L + \sin h\lambda_i L)}(\sin\lambda_i x - \sin h\lambda_i x)\end{aligned} \tag{10}$$

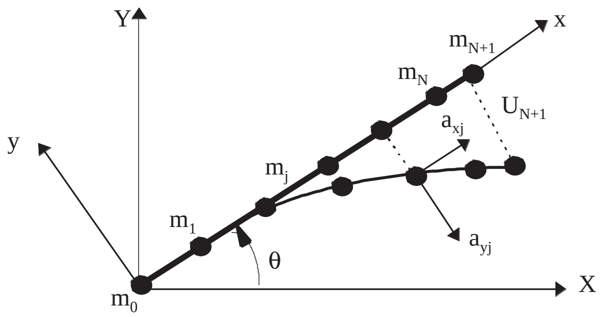
şeklindedir.



Şekil 2. Esnek Çubuğun Konumunu Belirleyen Parametreler

İndirgenmiş Parametre Yöntemi:

Esnek uzuvlu mekanizmaların analizinde kullanılan diğer bir yöntem de Sandor ve Sadler tarafından geliştirilen indirgenmiş parametre yöntemidir [6]. Bu yöntemde, çubuk kütlesinin belirli noktalarda yoğunlaştığı ve ara yerlerde sadece esnek, kütlesiz parçaların yer aldığı varsayılmaktadır. Şekil 3.



Şekil 3. Esnek Çubuğun İndirgenmiş Kütle Modeli

Çubuk üzerindeki j noktasına etki eden kuvvetler m_j kütlesinden kaynaklanan yatay ve düşey yöndeki atalet kuvvetleridir ve bu kuvvetler sırasıyla;

$$\begin{aligned} D_{xj} &= -m_j \cdot a_{xj} \\ D_{yj} &= -m_j \cdot a_{yj} \end{aligned} \tag{11}$$

şeklinde yazılabilir, Burada, a_{xj} ve a_{yj}, m_j kütlesinin ivme bileşenleri olup,

$$\begin{aligned} a_{xj} &= -x_j\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{u}_j + \ddot{\theta}u_j \\ a_{yj} &= x_j\ddot{\theta} - \ddot{u}_j + \dot{\theta}^2 u_j \end{aligned} \tag{12}$$

dir. Ayrıca,

$$x_j = \begin{cases} 2(j-1)\Delta x & 1 \le j \le N \\ L & j = N+1 \end{cases} \tag{13}$$

dir. Elemanter mukavemetten bildiğimiz ve Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayanan,

$$M(x,t) = EI\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{14}$$

bağıntısındaki turev ifadesi sonlu farklar yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_j,t)}{\partial x_j^2} &= \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \\ &= \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(2\Delta x)^2} \end{aligned} \tag{15}$$

şeklinde yazıldığında, (14) eşitliğinden çubuk üzerinde belirlenmiş noktalar için aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned} &\frac{(EI)_1}{8\Delta x^2}16u_2 = M_1 \\ &\frac{(EI)_2}{8\Delta x^2}(-8u_2 + \frac{8}{3}u_3) = M_2 \\ &\frac{(EI)_j}{8\Delta x^2}(2u_{j-1} - 4u_j + 2u_{j+1}) = M_j \quad j=3,\ldots,N-1 \\ &\frac{(EI)_N}{8\Delta x^2}(\frac{8}{3}u_{N-1} - 8u_N + \frac{16}{3}u_{N+1}) = M_N \end{aligned} \tag{16}$$

Herhangi bir j noktası için moment dengesi ise,

$$\begin{aligned} M_j = &-\sum_{k=j}^{N+1}(x_k - x_j)D_{yk} \\ &-\sum_{k=j}^{N+1}(u_k - u_j)D_{xk} \quad j = 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{17}$$

olup, (16) eşitlikleri (17) denkleminde yerleştirilerek genel nonlineer hareket denklemleri elde edilir. (17) denkleminde nonlineer terimler ihmal edilirse, indirgenmiş kütle yönteminin lineer hareket denklemleri elde edilmiş olur. Bu lineer denklem takımı matris formunda,

$$[IVM]\{\ddot{u}\} \cdot [SEH]\{u\} = \{SAGT\} \tag{18}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sayısal Sonuçlar

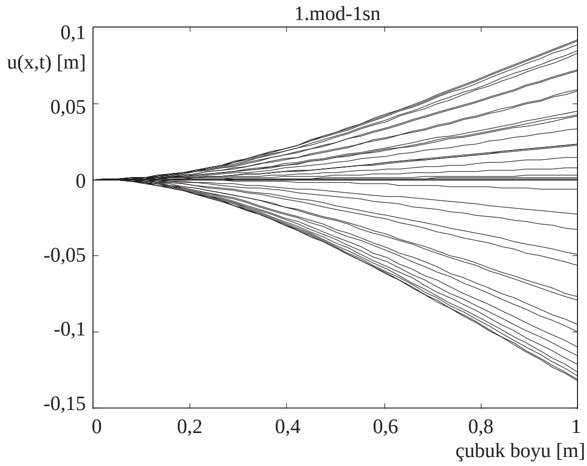
İkinci bölümde açıklanan iki temel model, esnek çubuğun dinamik davranışının simulasyonunda kullanılarak bazı sayısal sonuçlar bulunmuştur. Bu sonuçların elde edilmesinde şöyle bir yol izlenmiştir:

Kabul edilmiş modlar yönteminin uygulanmasında iki hal ayırdedilmiştir. İlkin sadece birinci mod, ikinci halde ise ilk üç mod göz önüne alınmıştır. Bu suretle bu yöntem çerçevesinde mod sayısının rolü araştırılmıştır. Her iki hal için $t_h = 1$ saniye ve $t_h = 1,5$ saniye için sonuçlar alınmıştır. Bunlar Şekil 4, 5, 6 ve 7 de sunulmuştur.

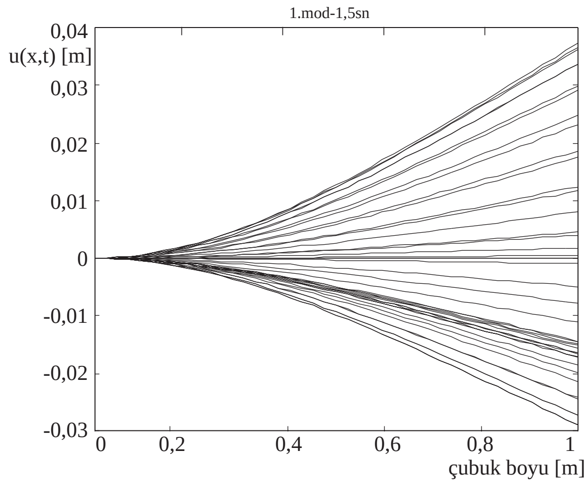
Şekillerde yatay eksen çubuk boyunu, düşey eksen çubuk sehimlerini göstermektedir. Düşey eksenin sıfır noktasından geçen yatay eksen çubuğun sükunetteki halini göstermekte olup, çubuk t_h

süresi içinde şekilde görülen ve bir arada bir yelpazeyi andıran elastik konumlar dizisinden geçmiştir. Örneğin Şekil 3 te, çubuğun uç noktası hareket başladıktan sonra Şekil 2 deki gösterime göre, pozitif yönde en fazla 0,09m=9 cm. kadar esnemiş, daha sonra esneme negatif yönde maksimum 0,13 m.=13cm ye ulaşmış ve yine tersine esnemeye başlamıştır. Bilgisayar ekranında her bir elastik eğri arka arkaya çizilebildiğinden esnemenin ne şekilde seyrettiği ve hareketin sonunda çubuğun ideal son konumun ne kadar gerisinde veya ilerisinde olduğu gözlenebilmektedir. Bu şekillerde eksenlerin ölçeği farklıdır. $t_h = 1$ saniyenin sonunda çubuk sehimi hem bir mod, hem de ilk üç modla yapılan hesaplarda 0,0414 m bulunmuştur. Keza $t_h = 1,5$ saniye için de sonuçlar aynı olup, -0,0009 m dir. Sonuç olarak hareket süresinin birinci tabii peryot süresinden az olmaması halinde sadece birinci modla yaklaşım literatürde birçok yazarlarca bahsedildiği gibi yeterli olm aktadır.

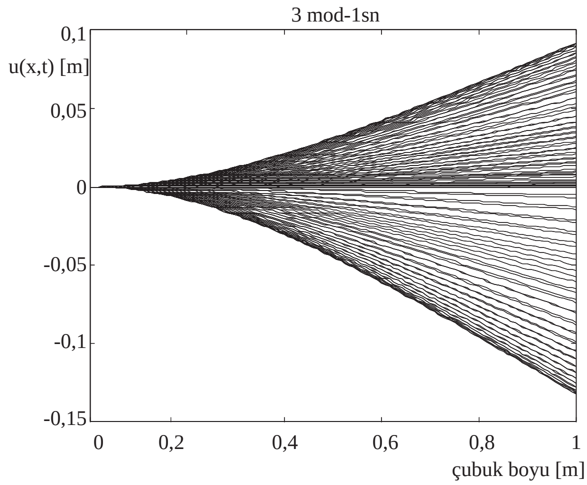
İndirgenmiş parametre yönteminde lineer ve nonlineer iki model kullanılmış olup, bundan başka kütlecik sayısı da bir değişken olarak mevcuttur. Bu nedenle lineer ve nonlineer modeller aynı kütle sayıları ve aynı hareket süreleri için uygulanmış, bulunan sonuçlar maksimum sehimler esas alınarak değerlendirilmiş ve grafiğe dökülmüştür. Şekil 8. ve 9. de $t_h = 1$ s için farklı kütlecik sayıları alınarak bulunan iki sonuç gösterilmiştir. Buna göre kütlecik sayısındaki artış, diğer bir ifadeyle daha gerçekçi bir modellemenin yapılması halinde her iki modelin sonuçlarında bariz bir farklılık ortaya çıkmaktadır. Şekil 10. ve 11. de ise nonlineer modelle farklı hareket süreleri ve farklı kütlecik sayıları için bulunan sonuçlar gösterilmiştir. Şekil 8 ila 11. deki eğriler çubuğun uç noktasının maksimum sehim yaptığı andaki elastik eğriyi göstermektedirler. Hareket süresince bulunan diğer eğriler de benzer şekilde olup düğüm noktası (nod) oluşmamakta bu ise verilen işletme şartlarında çubuğun elastik eğrisinin sadece birinci modla temsil edilebileceğini başka bir yoldan doğrulamaktadır. Şekil 10. da $t_h = 1$ s için kütlecik sayısı 5,10,20 ve 40 alınarak bulunan eğriler çizilmiştir. Kütlecik sayısı attıkça nonlineer modelin verdiği en büyük sehim değeri bir mod kabulü ile bulunana yaklaşmaktadır. Şekil 11. de ise $t_h = 1$ ve $t_h = 1,5$ s için iki farklı kütlecik sayısı (n=5 ve n=10) alınarak nonlineer modelle bulunan sonuçlar gösterilmiştir. Son olarak Şekil 12. de ise $t_h = 1$ s için KEM yöntemi (3 mod) ve nonlineer İP (n=5,10,20) yöntemiyle bulunan sonuçlar bir arada gösterilmiştir.



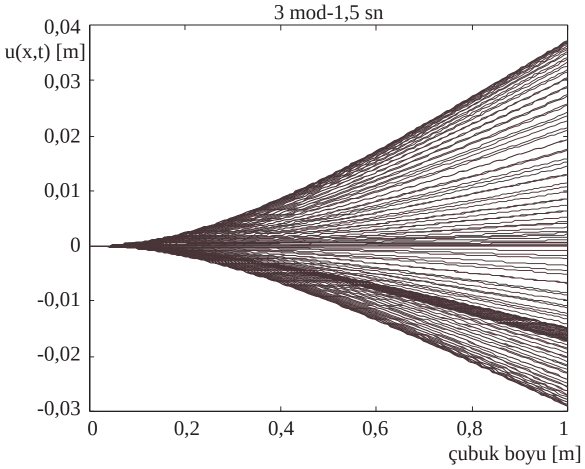
Şekil 4. Çubuk Sehimleri (1 Mod ve th=1 sn için)



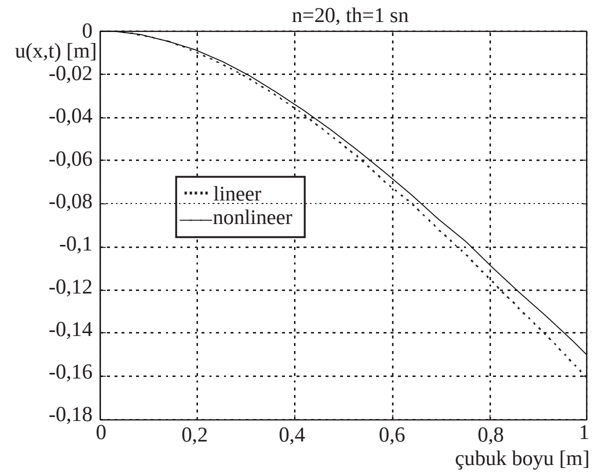
Şekil 5. Çubuk Sehimleri (1 Mod ve th=1,5 sn için)



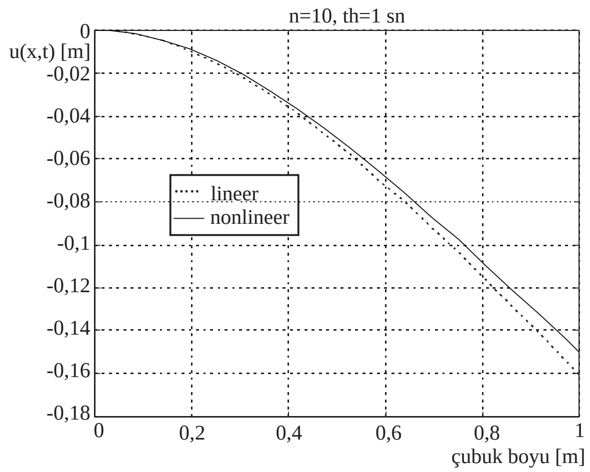
Şekil 6. Çubuk Sehimleri (3 Mod ve th=1 sn için)



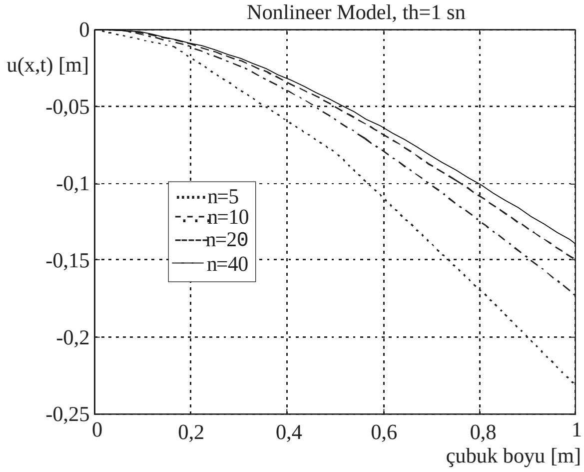
Şekil 7. Çubuk Sehimleri (3 Mod ve th=1,5 sn için)



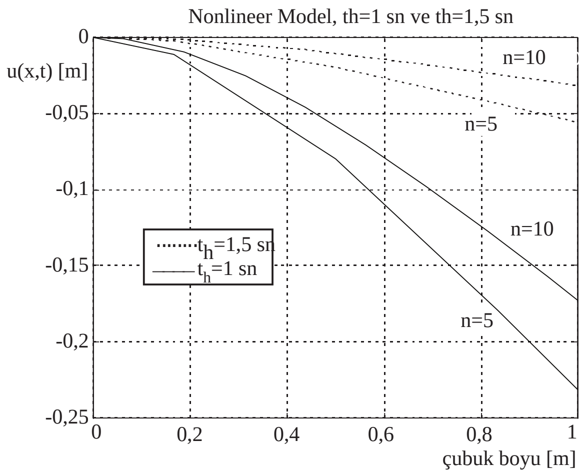
Şekil 8. Çubuk Sehimleri (20 Kütlecik ve th=1 sn için)



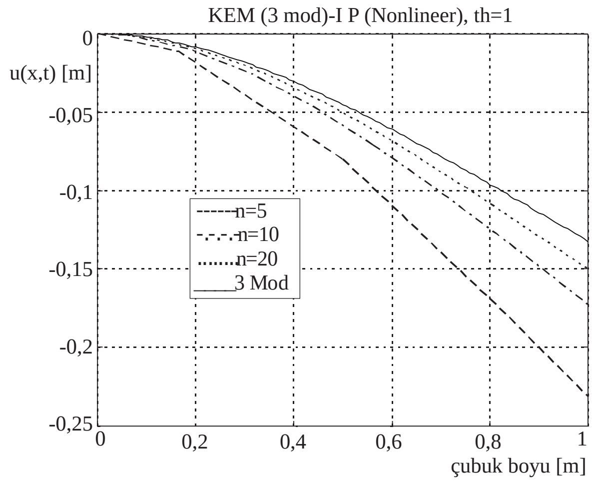
Şekil 9. Çubuk Sehimleri (10 Kütlecik ve th=1,5 sn için)



Şekil 10. Farklı Kütlecik Sayıları İçin Çubuk Sehimleri (th=1 sn)



Şekil 11. Farklı Hareket Süreleri İçin Çubuk Sehimleri (n=5 ve n=10)



Şekil 12. KEM ve IP Sonuçları (th=1 sn için)

Sonuçların karşılaştırılması, küçük kütlecik sayıları için lineer ve nonlineer indirgenmiş parametre modellerinin pek önemli bir farklılık arz etmediğini göstermiştir. Bu husus literatürde rastlanan, lineer modelin sistemin tabii frekansları altındaki işletme hızlarında ve kütlecik sayıları için tercih edilebileceğine ilişkin ifadelerle uyumludur [7].

Bu hesaplamalar 33 MHz, 8 RAM, 486 kişisel bilgisayarda yapılmış, diferansiyel denklemlerin çözümünde MATLAB paket programından yararlanılmış olup, bu programın kullandığı yöntem 4 ve 5. mertebeden Runge-Kutta formüllerine dayanmaktadır.

Son olarak Tablo 2 de bu modellerle bilgisayarda yapılan hesaplamaların aldığı süreler verilmektedir. Lineer indirgenmiş kütle modeli nonlineere göre içerdiği ters matris hesaplamaları yüzünden daha uzun süre almaktadır. Modal yöntemlerde ise tek moda dayalı çözüm en kısa sürede tamamlanmaktadır.

Tablo 2. Çözüm Süreleri (saniye)

Hareket Süresi			t=1 sn	t=1,5 sn
Kabul Edilmiş Modlar		1.Mod	25,71	29,44
		İlk 3 Mod	139,02	183,95
İndirgenmiş Kütle	Liner	5 Kütle	105,29	125,01
		10 Kütle	1139,43	1216,92
	Non-lineer	5 Kütle	72,89	89,75
		10 Kütle	349,49	559,69

Sistemin birinci tabii titreşim frekansının altındaki hareketlerde modal analize dayalı yöntemlerin üstelik sadece birinci mod göz önüne alınarak, uygulanmasıyla indirgenmiş parametre yöntemine göre daha hızlı ve aynı mertebeden sonuçlar vereceği görülmektedir.

Kaynaklar

Chait, Yossi et al., "A Natural Modal Expansion for the Flexible Robot Arm Problem Via a Self-Adjoint Formulation", IEEE, 6, 5, 601-603, 1990.

Çetinkurt, S., Wu, S., "Discrete-Time Tip Position Control of a Flexible One Arm Robot", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 114, 428-435, 1992.

Felio, V., Rattan, K.S., Brown, JR.,H.B., "Modelling and Control of Single Link Flexible Arms with Lumped Masses", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 114, 59-69, 1992.

Benati, M., Morro, A., "Formulation of Equations of Motion for a Chain of Flexible Links Using Hamilton's Principle", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 116, 81-88, 1994.

Yiğit, A.S., "On the Stability of PD Control for a Two-Link Rigid-Flexible Manipulator", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 116, 208-215, 1994.

Sadler, J.P., Sandor, G.N., "A Lumped Parameter Approach to Vibration and System Analysis of Elastic Linkages", Journal of Engineering Industry, 95, 549-557, 1973,

Sandor, G.N., Zhuang, X., "A Linearized Lumped Parameter Approach to Vibration and Stress Analysis of Elastic Linkages", Mechanism and Machine Theory, 20, 5, 427-437, 1985.