

## İki ve Üç Malzemeli Kompozitin Dinamik Analizi İçin Bir Sınır Eleman Modeli

Ali Hamza TANRIKULU

*Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana - TURKEY*

Yalçın MENĞİ

*Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü, Ankara - TURKEY*

Ahmed Kamil TANRIKULU

*Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana - TURKEY*

Geliş Tarihi 12.07.1999

### Özet

Bu çalışmada, iki malzemeli kompozitin dinamik analizi için, yerel olmayan sınır şartlarını içeren sınır eleman formülasyonu yapılmıştır. Formülasyonda kullanılan yerel olmayan sınır şartları, üç malzemeli kompozitin analizinin yapılmasına imkan vermektedir. Fourier dönüşüm uzayında yapılan formülasyonda, sabit eleman yaklaşımı kullanılmıştır. Yapılan formülasyona dayalı; iki boyutlu analiz için CD2NL ve üç boyutlu analiz için CD3NL isimli, genel amaçlı iki bilgisayar programı hazırlanmıştır. Fourier dönüşüm uzayında dinamik analiz yapan bu programlar yardımıyla, frekansa küçük değerler verilerek statik analiz de yapılabilmektedir. Hazırlanan programlar ile çözülen problemlerin sonuçları, literatürde verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Sınır Eleman Yöntemi, İki Malzemeli Kompozit, Üç Malzemeli Kompozit, Yerel olmayan Sınır Şartları, Fourier Dönüşüm Uzayı.

## A Boundary Element Model For Dynamic Analysis of Two-Phase and Three-Phase Composites

### Abstract

In this study, a boundary element formulation having nonlocal boundary conditions is presented for the dynamic analysis of a two-phase composite. Nonlocal boundary conditions, used in the formulation, make it possible to analyze a three-phase composite. The formulation is performed in Fourier transform space using a constant element model. Based on the formulation presented in this study, two general purpose computer programs are developed, namely, CD2NL (for two-dimensional analysis) and CD3NL (for three-dimensional analysis). The programs perform the analysis in Fourier transform space and can also be used for static analysis by assigning a small value to the frequency. The results of some benchmark problems obtained using the programs are compared with those in the literature.

**Key Words:** Boundary Element Method, Two-Phase Composite, Three-Phase Composite, Nonlocal Boundary Conditions, Fourier Transform Space.

## Giriş

Sınır eleman yöntemi, yetmişli yılların başından bu yana, çeşitli mühendislik problemlerinin (elastodinamik, akışkanlar mekaniği, kırılma mekaniği, akustik, vb.) çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır (Banerjee ve Watson, 1986; Mackerle ve Brebbia, 1988; Brebbia ve Connor, 1989; Cheng, Brebbia ve Grilli, 1990; Tanaka, Brebbia ve Shaw, 1990; Trevelyan, 1994).

Sınır eleman yöntemi, herhangi bir sınır değer problemini, çözüm bölgesinin sınırında tanımlanan integral denklemler yardımıyla çözen, sayısal bir yöntemdir. İntegral ifadelerinin içinde yer alan temel çözümler (fundamental solutions), analitik olarak hesaplandığından, bu yöntem, yarı analitik bir yöntemdir. Yarı analitik olması nedeniyle, bu yöntemle, diğer sayısal yöntemlere göre daha doğru sonuçlar elde edilebilmektedir. Sınır eleman yöntemi, özellikle sonsuza uzanan çözüm bölgeleri ve lineer problemler için oldukça uygundur.

İntegral denklemlerin çözümünde kullanılan büyüklüklere bağlı olarak, sınır eleman yönteminde, direkt sınır eleman yöntemi ve direkt olmayan sınır eleman yöntemi olmak üzere, iki farklı yaklaşım yapılmaktadır (Beskos, 1987). Direkt olmayan yaklaşımda integral denklemler, fiziksel anlamı olmayan ara büyüklükler kullanılarak çözülmekte ve bu büyüklükler yardımıyla deplasman ve gerilme gibi sınır büyüklükleri belirlenmektedir. Direkt olmayan sınır eleman yöntemi, ilk olarak, potansiyel problemlerinin çözümü için Fredholm tarafından kullanılmıştır (Becker, 1992). Buna karşılık, daha yaygın olarak uygulanan direkt yaklaşımda ise, integral denklemler doğrudan sınır büyüklükleri cinsinden yazılmakta, ve bu şekilde bilinen ve bilinmeyen sınır büyüklükleri birbirine bağlanmaktadır.

Direkt sınır eleman yönteminde, öncelikle, probleme ait diferansiyel denklemler, integral denklemlere dönüştürülmektedir. Bu integral denklemler, çözüm bölgesinin sınırında tanımlanan integrallerden oluşmaktadır. Problemden hacimsel kaynak veya kuvvetler bulunması durumunda, integral denklemler, hacim integrallerini de içerecektir. Böyle bir durumda, hacim integralleri de sınır integraline dönüştürülebilmekte (Partridge, Brebbia ve Wrobel, 1992), böylece, integral denklemlerin tamamı, sınır üzerinde tanımlanabilmektedir. İntegral denklemlerin içinde yer alan temel çözümler (çekirdek fonksiyonları), referans ortamında birim yükleme yöntemiyle analitik olarak elde edilebilmek-

tedir (Mengi ve arkadaşları, 1994). Referans ortamı, temel çözümlerin elde edilmesini kolaylaştırdığı için, literatürde genellikle sonsuz ortam olarak seçilmektedir. İntegral denklemler oluşturulduktan sonra, ikinci adımda, çözüm bölgesinin sınırı küçük elemanlara (sınır elemanı) bölünmekte ve probleme ait bilinmeyen sınır büyüklükleri, integral denklemlerin sayısal integrasyonu ile hesaplanmaktadır. Son olarak, çözüm bölgesi içinde yer alan noktalarda hesaplanması istenilen büyüklükler sayısal olarak elde edilmektedir. İntegral denklemlerin sayısal çözümünde, yalnızca çözüm bölgesinin sınırının küçük elemanlara bölünmesi, göz önüne alınan problemdeki bilinmeyen sayısını, sonlu elemanlar yöntemine göre, önemli ölçüde azaltmaktadır.

Bu çalışmada, iki malzemeli kompozitin iki ve üç boyutlu dinamik analizi için yerel olmayan sınır şartlarını içeren sınır eleman formülasyonu yapılmıştır. Malzemenin lineer elastik olduğu kabul edilmektedir. Fourier dönüşüm uzayında yapılan formülasyonda, sabit eleman modeli kullanılmıştır. Yapılan formülasyona dayalı olarak, iki ve üç boyutlu analiz için genel amaçlı iki adet bilgisayar programı (CD2NL ve CD3NL) hazırlanmıştır. İki malzemeli kompozitlerin Fourier dönüşüm uzayında dinamik analizi için geliştirilmiş olan programlar ile, aynı zamanda, tek malzemeli homojen cisimlerin veya yerel olmayan sınır şartları kullanılarak üç malzemeli kompozitlerin analizleri de yapılabilmektedir. Ayrıca, frekansa küçük değerler verilerek, problemin statik analizinin gerçekleştirilmesi mümkündür.

Yapılan formülasyon ve hazırlanan programların doğruluğunu kontrol etmek amacıyla, literatürde sonuçları verilen iki ve üç boyutlu iki adet problem CD2NL ve CD3NL ile çözülmüştür.

## Elastodinamik Problemleri için Sınır Eleman Denklemi

Elastodinamik problemleri için sınır eleman denkleminin elde edilmesi, literatürde detaylı olarak verilmektedir (Brebbia ve Dominguez, 1989; Banerjee, 1994; Manolis ve Beskos, 1987; Mengi ve arkadaşları, 1994). Şekil 1'de görülen üç boyutlu bir cismin elastodinamik analizi için sınır eleman denklemi, Fourier dönüşüm uzayında ve matris formunda,

$$\underline{c} \underline{u}(A) = \int_S \underline{G}(A, P) \underline{t}(P) dS - \int_S \underline{H}(A, P) \underline{u}(P) dS + \int_V \underline{G}(A, P) \underline{f}(P) dV \quad (1)$$

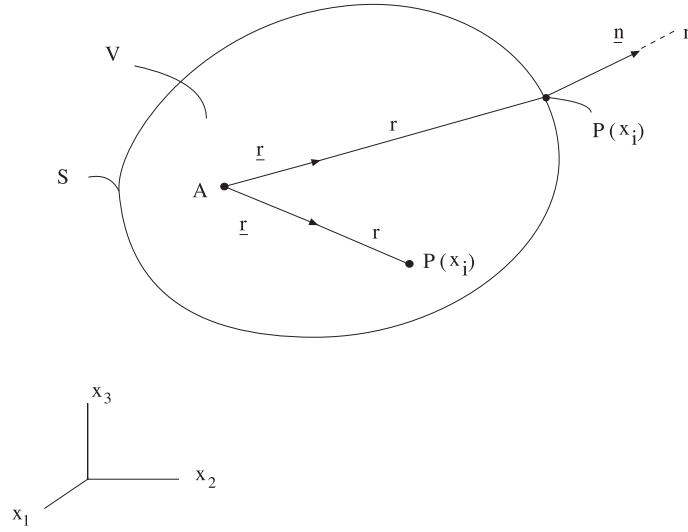
şeklinde yazılabilmektedir. Burada  $S$ , cismin sınır yüzeyini;  $V$  ise cismin hacmini göstermektedir. İntegralli terimlerde görülen  $\underline{G}$  ve  $\underline{H}$ , (3x3) boyutunda matrislerdir ve sırasıyla, elastodinamik problemleri için elde edilmiş olan birinci ve ikinci temel çözümleri temsil etmektedir.  $\underline{u}$ ,  $\underline{t}$  ve  $\underline{f}$  ise, sırasıyla (3x1) boyutunda, deplasman, gerilme ve hacim kuvveti vektörlerini göstermektedir. Ayrıca,  $A$  ve  $P$

sırasıyla, integral işlemlerinde kullanılan sabit (fixed) noktayı ve integrasyon noktasını temsil etmektedir.

(1) denklemini,  $A$  noktasının deplasmanlarını (Şekil 1), cismin iç bölgesi ve sınır yüzeyi üzerinde tanımlanan integral ifadelerine bağlamaktadır. Denklemin sol tarafında görülen (3x3) boyutundaki  $\underline{c}$  matrisinin tanımı,  $A$  noktasının konumuna bağlı olarak değişmektedir.  $A$  noktası Şekil 1'de görüldüğü gibi cismin içinde bir nokta ise,  $\underline{c}$  matrisi,

$$\underline{c} = \underline{I} \quad (2)$$

şeklinde dir. Burada  $\underline{I}$ , (3x3) boyutunda birim matrisi temsil etmektedir. Eğer  $A$  noktası cismin dışında bulunuyorsa bu durumda,



Şekil 1. Üç boyutlu cisim

$$\underline{c} = \underline{0} \quad (3)$$

olmaktadır. Son olarak,  $A$  noktası sınır yüzeyi üzerinde bir nokta ise,

$$\underline{c} = \frac{1}{2} \underline{I} \quad (4)$$

olarak verilmektedir. (4) eşitliği,  $A$  noktasının köşe noktası olması durumunda geçerli değildir. Eğer  $A$  noktası,  $S$  üzerinde bir köşe noktası ise,  $\underline{c}$  matrisi,  $A$  noktasındaki köşe açılarına bağlı olarak verilmektedir (örnek olarak bkz, Brebbia ve Dominguez, 1989).

Üç boyutlu problemler için verilen (1) denklemini, iki boyutlu analiz için de kullanılabilir. Ancak bu durumda, denklemde görülen matris ve vektörler, sırasıyla, (2x2) ve (2x1) boyutunda olacaktır.

Elastodinamik problemleri için temel çözümler ( $\underline{G}$  ve  $\underline{H}$ ), literatürde, referans sisteminin sonsuz ortam olarak seçilmesi durumunda analitik olarak elde edilmektedir (bkz, Mengi ve arkadaşları, 1994).

### Sınır Eleman Denkleminin Sayısal Çözümü

Elastodinamik problemleri için (1) eşitliği ile verilmiş olan sınır eleman denklemi, cismin sınırının küçük elemanlara bölünmesiyle (sınır elemanları) sayısal olarak çözümlenerek, sınır üzerindeki bilinmeyen deplasman ve gerilme vektörü bileşenleri (sınır büyüklükleri) hesaplanabilmektedir.

Bu çalışmada, sınır eleman denkleminin sayısal olarak çözümünü için sabit eleman formülasyonu kullanılmıştır. Sabit eleman formülasyonunda, her

bir sınır elemanı (sabit eleman) üzerindeki sınır büyüklüklerinin sabit (uniform) olduğu, ve ayrıca, sınır elemanlarının; iki boyutlu analizde bir doğru parçası, üç boyutlu analizde ise bir düzlem parçası şeklinde olduğu kabul edilmektedir. Sabit eleman yaklaşımında, eleman üzerinde tek düğüm noktası seçilmekte ve seçilen bu düğüm noktasının, elemanın ağırlık merkezinde olduğu kabul edilmektedir.

Sayısal çözüm için Şekil 2’de görüldüğü gibi, cisim sınırı,  $N$  adet sınır elemanına bölünmektedir. Şekilde, sınır elemanlarının düğüm noktaları,  $A_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) ile gösterilmiştir. Buna göre, (1) denklemi,  $m$ ’inci sınır elemanının  $A_m$  düğüm noktası için, hacim kuvvetlerinin bulunmaması durumunda,

$$\frac{1}{2}\underline{u}^m = \sum_{n=1}^N \underline{G}^{mn}\underline{t}^n - \sum_{n=1}^N \underline{H}^{mn}\underline{u}^n \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde,

$$\underline{G}^{mn} = \int_{S_n} \underline{G}(A_m, P)dS; \underline{H}^{mn} = \int_{S_n} \underline{H}(A_m, P)dS \quad (6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (6) denkleminde görülen  $S_n$ ,  $n$ ’inci elemanın sınırını temsil etmektedir (Şekil

2).  $\underline{u}^n$  ve  $\underline{t}^n$  ise,  $n$ ’inci eleman için deplasman ve gerilme vektörü bileşenlerini göstermektedir. Sabit eleman formülasyonunda yapılan kabullere göre düğüm noktası bir köşe noktası olamayacağından,

$$\underline{e} = \frac{1}{2}\underline{I} \quad (7)$$

olarak alınmaktadır.

(5) denklemi,  $N$  adet sınır elemanı için yazılırsa, elde edilen denklemler bir araya toplanarak, matris formunda,

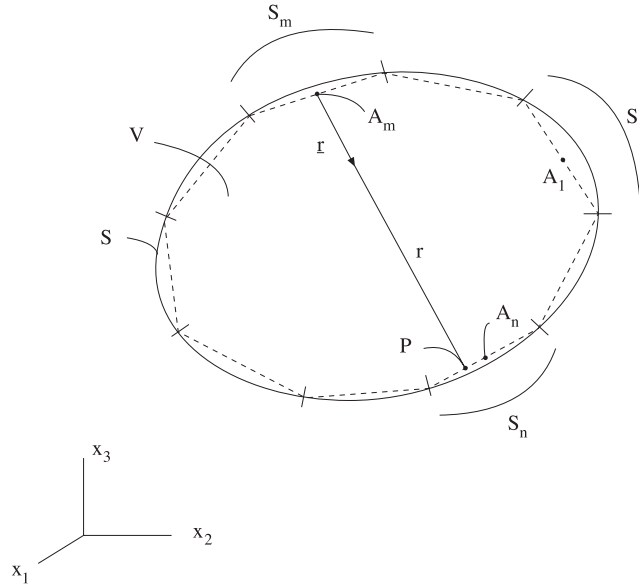
$$\tilde{\underline{H}}\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{G}}\tilde{\underline{t}} \quad (8)$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\tilde{\underline{G}} = (\underline{G}^{mn}); \tilde{\underline{H}} = \left( \underline{H}^{mn} + \frac{1}{2}\underline{I}\delta_{mn} \right) \quad (9)$$

$$\tilde{\underline{u}} = (\underline{u}^n); \tilde{\underline{t}} = (\underline{t}^n) \quad (m, n = 1, 2, \dots, N)$$

olarak verilmektedir. (9) eşitliklerinde görülen  $\delta_{mn}$  Kronecker delta’yı göstermektedir.



Şekil 2. Cisim sınırının sınır elemanlarına bölünmesi

(8) eşitliği, sınır eleman yöntemine ait sistem denklemini temsil etmektedir. Bu denklemde görülen  $\tilde{\underline{H}}$  ve  $\tilde{\underline{G}}$  matrisleri  $(3N \times 3N)$  boyutunda;  $\tilde{\underline{u}}$  ve  $\tilde{\underline{t}}$  vektörleri de  $(3N \times 1)$  boyutunda olacaktır.  $\tilde{\underline{H}}$  ve  $\tilde{\underline{G}}$  matrislerinin elemanları olan  $\underline{H}^{mn}$  ve  $\underline{G}^{mn}$ , (6)

eşitliklerinde görülen integrallerin, Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılarak (Press ve ark, 1986) hesaplanmasıyla elde edilmektedir.

(8) sistem denklemi  $3N$  adet denklem içermektedir. Cisim sınırının  $N$  adet sabit sınır

elemanna bölünmüş olması nedeniyle, toplam  $6N$  adet sınır büyüklüğü  $(\underline{u}, \underline{t})$  olduğu için,  $3N$  adet bilginin sınır şartı olarak verilmesi gerekmektedir. Sınır şartları olarak, her bir sınır elemanı üzerinde  $x_i (i = 1 - 3)$  doğrultusunda

$$(t_i, u_i) \quad (10)$$

bileşenlerinden birinin veya kombinasyonunun bilinmesi gerekmektedir.

Böylece, bilinen sınır şartları, (8) sistem denkleminde yerine konularak, bilinmeyenler denklemin sol tarafında toplanırsa bu denklem,

$$\underline{A}\underline{X} = \underline{B}\underline{Y} \quad (11)$$

formunda elde edilebilir. Burada,  $\underline{X}$  ve  $\underline{Y}$  sırasıyla, bilinmeyen ve bilinen sınır büyüklüklerini temsil etmektedir.  $\underline{A}$  ve  $\underline{B}$  matrisleri ise; tüm bilinmeyenler denklemin sol tarafında toplanacak şekilde,  $\underline{H}$  ve  $\underline{G}$  matrislerinin ilgili kolonlarının yer değiştirilmesiyle elde edilmektedir. (11) denklemi çözülerek, cisim sınırı üzerindeki bilinmeyen sınır büyüklükleri hesaplanmaktadır.

### İç Noktalarda Gerilme ve Deplasmanların Hesabı

(11) denkleminin çözümü ile elde edilen sınır büyüklükleri kullanılarak, cismin içinde bulunan herhangi bir  $A$  noktasında (Şekil 1) gerilme ve deplasman değerleri hesaplanabilmektedir. Bu değerlerin sayısal olarak nasıl hesaplanacağı, aşağıda açıklanmıştır.

### Deplasmanların Hesabı

Cismin içinde bulunan herhangi bir  $A$  noktasındaki deplasmanlar, (1) denklemi yardımıyla bulunabilmektedir. Buna göre  $\underline{c}$  matrisi için verilen (2) eşitliği kullanılırsa,  $A$  noktasındaki deplasmanlar için indisli notasyonda, hacim kuvvetlerinin bulunmaması durumunda,

$$u_l(A) = \int_S G_{lk}(A, P)t_k(P)dS - \int_S H_{lk}(A, P)u_k(P)dS \quad (12)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin sayısal olarak çözümü için, cisim sınırı  $N$  adet sınır elemanına bölünerek sabit eleman formülasyonu kullanılırsa,

$$u_l(A) = \sum_{n=1}^N G_{lk}^n t_k^n - \sum_{n=1}^N H_{lk}^n u_k^n \quad (13)$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$G_{lk}^n = \int_{S_n} G_{lk}(A, P)dS; H_{lk}^n = \int_{S_n} H_{lk}(A, P)dS \quad (14)$$

eşitlikleri kullanılmıştır. Böylece, (13) denklemi,  $A$  noktasının deplasmanlarını, cisim sınırı üzerindeki sınır büyüklüklerine bağlı olarak vermektedir. (14) eşitliklerinde görülen integraller, Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanabilmektedir.

Yukarıda indisli notasyonda yazılmış olan denklemlerde bulunan indisler; üç boyutlu analizde 1 ile 3 arasında değişmekte, iki boyutlu analizde ise 1 ve 2 değerlerini almaktadır.

### Gerilmelerin Hesabı

Gerilmelerin hesabının yapılabilmesi için, (12) denklemi ile birlikte  $A$  noktasında bünye denkleminin yazılması gerekmektedir.  $A$  noktasında bünye denklemi,

$$\tau_{ij}(A) = c_{ijsl} \frac{\partial u_l}{\partial a_s}(A) \quad (15)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\tau_{ij}(i, j = 1 - 3)$ , gerilme bileşenlerini göstermektedir. Elastik  $c_{ijsl}$  katsayıları, izotropik malzemeler için,

$$c_{ijsl} = \mu(\delta_{is}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{js}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{sl} \quad (16)$$

olarak verilmektedir. Lamé sabiti  $\lambda$ , kayma modülü  $\mu$  ve Poisson oranı  $\nu$  cinsinden,

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{(1 - 2\nu)} \quad (17)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

(15) denkleminde görülen  $a_s (s = 1 - 3)$ ,  $A$  noktasının koordinatlarını temsil etmektedir. Buna göre, (12) denkleminin  $A$  noktasının koordinatlarına göre türevi alınıp, elde edilen ifadeler, (15) denkleminde yerine yazılırsa,  $A$  noktasındaki gerilme bileşenleri için,

$$\tau_{ij}(A) = \int_S D_{kij}(A, P)t_k(P)dS - \int_S S_{kij}(A, P)u_k(P)dS \quad (18)$$

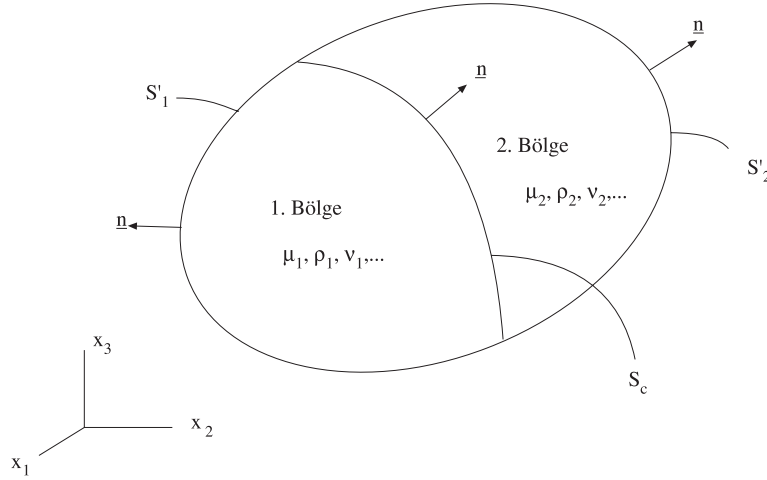
eşitliği elde edilebilir. Burada,

$$\begin{aligned} D_{kij}(A, P) &= c_{ijsl} \frac{\partial G_{lk}(A, P)}{\partial a_s}; \\ S_{kij}(A, P) &= c_{ijsl} \frac{\partial H_{lk}(A, P)}{\partial a_s} \end{aligned} \quad (19)$$

eşitlikleri kullanılmıştır. Görüldüğü gibi,  $D_{kij}$  ve  $S_{kij}$  gerilme çekirdek fonksiyonları, temel çözümlerin  $(\underline{G}, \underline{H})$   $A$  noktasının koordinatlarına göre türevleri cinsinden elde edilebilmektedir. ( $D_{kij}$  ve  $S_{kij}$  fonksiyonları literatürde verilmiştir; örneğin, bkz, Özkan ve Mengi, 1997).

(18) denklemi sayısal olarak çözülürse,  $A$  noktasındaki gerilmeler bulunabilir. Bu amaçla, cisim sınırı  $N$  adet sınır elemanına bölünerek sabit eleman formülasyonu kullanılırsa, (18) denklemi,

$$\tau_{ij}(A) = \sum_{n=1}^N D_{kij}^n t_k^n - \sum_{n=1}^N S_{kij}^n u_k^n \quad (20)$$



Şekil 3. İki malzemeli kompozit cisim

Şekilde görüldüğü gibi, iki malzemeli kompozitin toplam sınırı, birinci bölgeye ait olan  $S'_1$  ve ikinci bölgeye ait olan  $S'_2$  sınırlarından oluşmaktadır. İki bölgenin arakesitini oluşturan sınır yüzeyi ise  $S_c$  ile

şeklinde yazılabilir. (20) denkleminin elde edilmesinde,

$$\begin{aligned} D_{kij}^n &= \int_{S_n} D_{kij}(A, P)dS; \\ S_{kij}^n &= \int_{S_n} S_{kij}(A, P)dS \end{aligned} \quad (21)$$

tanımları kullanılmıştır. Bu eşitliklerde görülen integraller, Gauss sayısal integrasyon yöntemi ile hesaplanabilmektedir.

### İki Malzemeli Kompozitin Dinamik Analizi için Sınır Eleman Formülasyonu

Homojen elastik bir cismin dinamik analizi için yapılan sınır eleman formülasyonu, bu bölümde iki malzemeli kompozitin dinamik analizinde kullanılacaktır. İki malzemeli kompozit, Şekil 3'te görüldüğü gibi, malzeme özellikleri farklı olan iki bölgeden oluşmaktadır. Şekilde, birinci bölgenin malzeme özellikleri ' $\mu_1, \rho_1, \nu_1, \dots$ ' ile, ikinci bölgenin malzeme özellikleri ise ' $\mu_2, \rho_2, \nu_2, \dots$ ' ile gösterilmiştir.

gösterilmiştir (Şekil 3).  $S_c$  sınırının birim normalinin  $(\underline{n})$  yönü, birinci bölgeden ikinci bölgeye doğru seçilmiştir.  $S'_1$  ve  $S'_2$  sınırları için ise  $\underline{n}$ , birim dış normalini göstermektedir.

İki malzemeli kompozitin dinamik analizi için yapılacak olan sınır eleman formülasyonu, iki adımda gerçekleştirilecektir. İlk adımda, (8) eşitliği ile verilen sistem denklemi, birinci ve ikinci bölge için ayrı ayrı yazılacaktır. Böylece her iki bölge için elde edilen sistem denklemleri, ikinci adımda,  $S_c$  sınırı üzerinde süreklilik şartları sağlanacak şekilde birleştirilecektir.

İki bölge için ayrı ayrı sistem denkleminin elde edilebilmesi için, iki malzemeli kompozit, Şekil 4'te görüldüğü gibi,  $S_c$  sınırı boyunca iki parçaya ayrılmaktadır. Buna göre, birinci ve ikinci bölgeye ait toplam sınırlar, sırasıyla,  $S_1$  ve  $S_2$  ile gösterilirse, bu sınırlar için,

$$S_1 = S'_1 \oplus S_c; S_2 = S'_2 \oplus S_c \quad (22)$$

eşitlikleri yazılabilir.

(8) eşitliği ile verilen sistem denklemi, birinci bölge için yazılırsa,

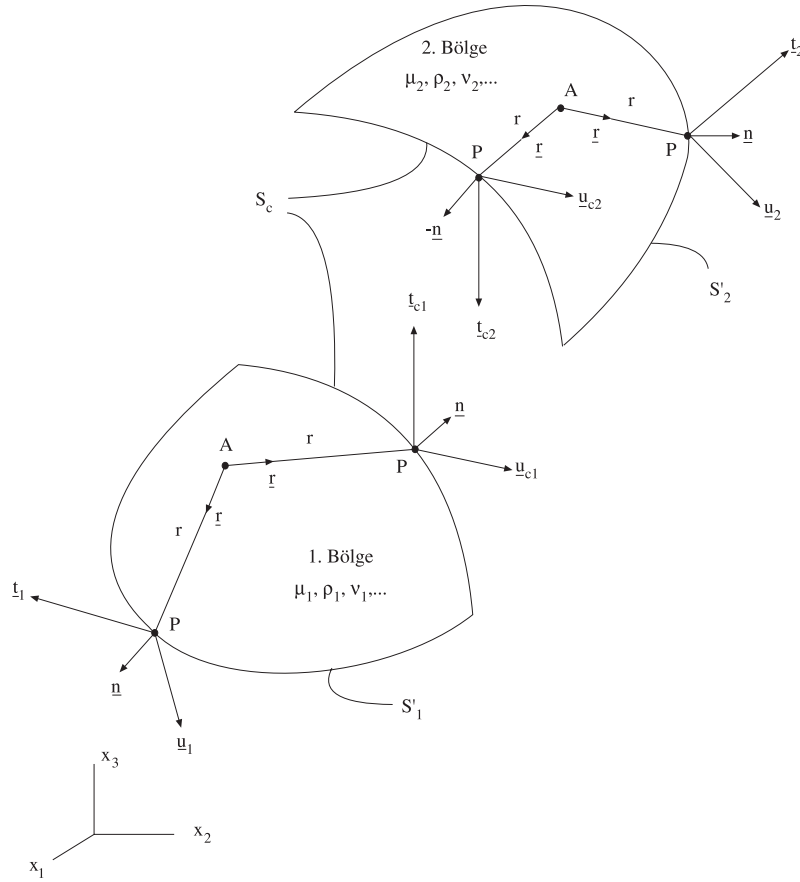
$$[\tilde{H}_1 \tilde{H}_{1c}] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_{c1} \end{bmatrix} = [\tilde{G}_1 \tilde{G}_{1c}] \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_{c1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

denklemi elde edilir.

(23) eşitliği, birinci bölgeye ait sistem denklemini temsil etmektedir. Benzer şekilde, ikinci bölgeye ait sistem denklemi,

$$[\tilde{H}_2 \tilde{H}_{2c}] \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_{c2} \end{bmatrix} = [\tilde{G}_2 \tilde{G}_{2c}] \begin{bmatrix} \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_{c2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

şeklinde bulunabilir.



Şekil 4. Kompozit cismin iki bölgesine ait serbest cisim diyagramları

Birinci ve ikinci bölge için oluşturulan sistem denklemleri,  $S_c$  sınırı üzerinde süreklilik şartları sağlanacak şekilde birleştirilebilir. Süreklilik şartları olarak,  $S_c$  sınırı üzerinde, deplasman ve gerilme

sürekliliği göz önüne alınmaktadır. Buna göre,  $S_c$  sınırı üzerindeki sınır büyüklükleri için,

$$\underline{u}_{c1} = \underline{u}_{c2}; \underline{t}_{c1} = -\underline{t}_{c2} \quad (25)$$

eşitlikleri yazılabilmektedir (Şekil 4).

Böylece, (25) eşitliği kullanılarak, (23) ve (24) denklemleri birleştirilirse, iki malzemeli kompozit

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & 0 & \tilde{H}_{1c} \\ 0 & \tilde{H}_2 & \tilde{H}_{2c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & 0 & \tilde{G}_{1c} \\ 0 & \tilde{G}_2 & -\tilde{G}_{2c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_c \end{bmatrix} \quad (26)$$

şeklinde elde edilebilmektedir. Burada,

$$\tilde{u}_{c1} = \tilde{u}_c; \quad \tilde{t}_{c1} = \tilde{t}_c \quad (27)$$

tanımlamaları kullanılmıştır.

(26) denklemi,  $S'_1$  ve  $S'_2$  sınırları üzerinde bilinen sınır şartları kullanılarak çözümlerse, bu sınırlar üzerinde bilinmeyen sınır büyüklükleri ile  $S_c$  sınırı üzerinde bilinmeyen deplasman ( $\tilde{u}_c$ ) ve gerilme vektörü ( $\tilde{t}_c$ ) bileşenleri hesaplanmış olacaktır. Hesaplanan bu bilgiler kullanılarak, (13) ve (20) denklemleri yardımıyla, birinci ve ikinci bölgeye ait iç noktalarda deplasman ve gerilmeler belirlenebilecektir.

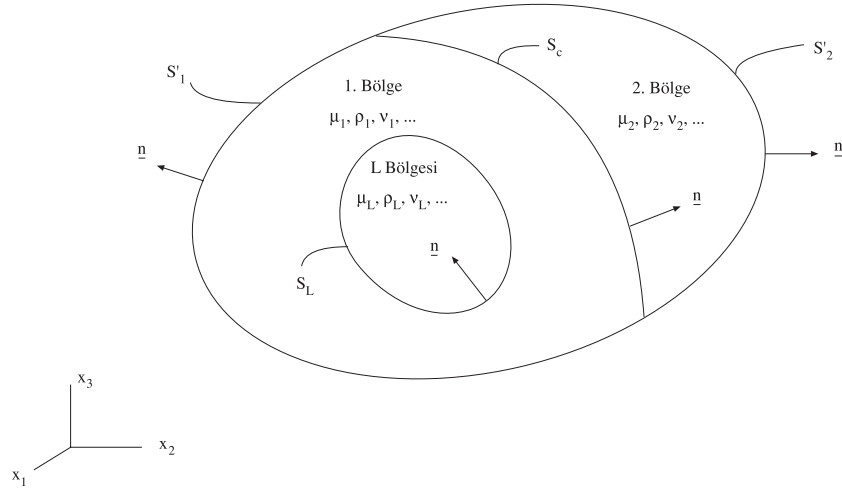
### Üç Malzemeli Kompozitin Dinamik Analizi için Sınır Eleman Formülasyonu

Şekil 5'te görülen ve üç farklı malzemeden oluşan cisim göz önüne alınmaktadır. Şekilde görüldüğü

için sistem denklemi,

gibi, önceki bölümde formülasyonu verilen iki malzemeli kompozitin birinci bölgesinde, malzeme özellikleri ' $\mu_L, \rho_L, \nu_L, \dots$ ' ile gösterilen, bir ' $L$ ' bölgesinin bulunduğu kabul edilmektedir. Birinci bölge ile  $L$  bölgesinin arakesitini oluşturan sınır yüzeyi,  $S_L$  ile gösterilmiştir.  $S_L$  sınırının birim normalinin ( $\underline{n}$ ) yönü, birinci bölgeden  $L$  bölgesine doğru seçilmiştir. Ayrıca,  $L$  bölgesinin tamamının birinci bölgenin içinde kaldığı ve  $S_L$  sınırının,  $L$  bölgesinin tüm sınırı olduğu kabul edilmektedir.

Sözü edilen üç malzemeli cismin analizinin yapılabilmesi için öncelikle, Şekil 6'da görüldüğü gibi,  $L$  bölgesinin birinci bölgeden çıkarıldığı düşünülmektedir.  $L$  bölgesinin çıkarılmasıyla elde edilen iki malzemeli kompozit için sistem denklemi, (26) eşitliğinin bulunmasında izlenen yol kullanılarak düzenlenebilir. Ancak burada, birinci bölgeye ait sınırın değiştiğine dikkat etmek gerekir. Buna göre, birinci bölgeye ait sınır  $S_1^{L}$  ile gösterilirse, bu sınır için,



Şekil 5. Üç farklı malzemeden oluşan cisim

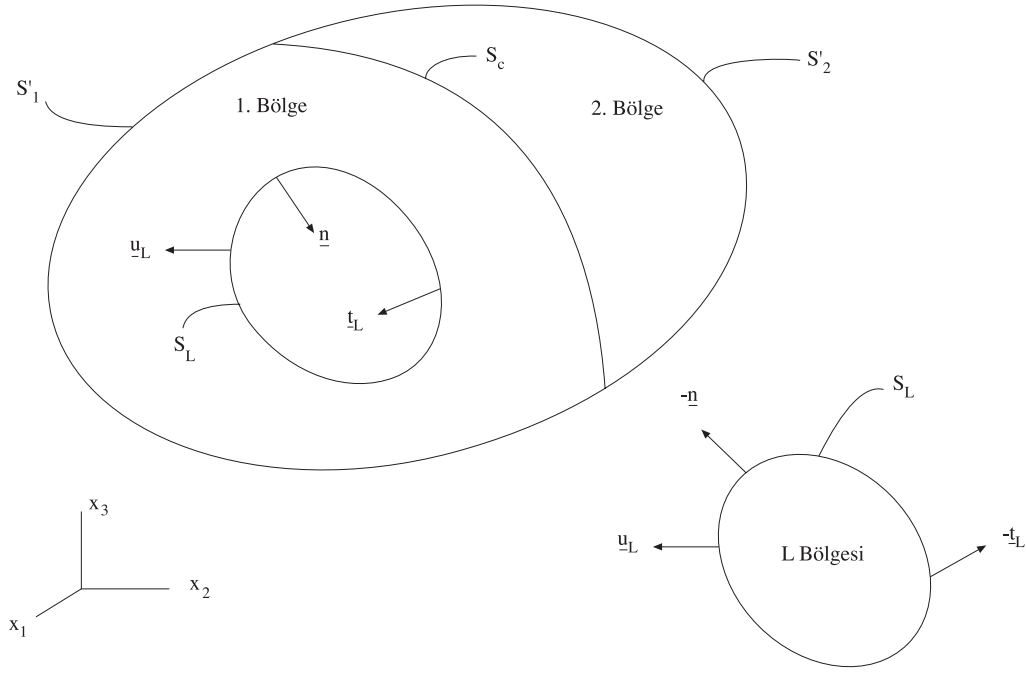
$$S_1^{L} = S'_1 \oplus S_L \quad (28)$$

eşitliği, ve birinci bölgenin toplam sınırı için ise,

$$S_1 = S_1^{L} \oplus S_c \quad (29)$$

eşitliği yazılabilmektedir. Bu durumda, birinci bölge için sistem denklemi,





Şekil 6. L bölgesinin birinci bölgeden çıkarılması

$$[\tilde{H}_1 \quad \tilde{H}_{1L} \quad \tilde{H}_{1c}] \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_c \end{bmatrix} = [\tilde{G}_1 \quad \tilde{G}_{1L} \quad \tilde{G}_{1c}] \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_c \end{bmatrix} \quad (30)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu denklemden görülen  $\tilde{u}_L$  ve  $\tilde{t}_L$  vektörleri,  $S_L$  sınırı üzerinde tanımlanan sınır büyüklüklerini temsil etmektedir. Diğer taraftan, ikinci bölgeye ait sistem denklemi, (24), (25) ve (27) eşitlikleri kullanılarak,

$$[\tilde{H}_2 \quad \tilde{H}_{2c}] \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_c \end{bmatrix} = [\tilde{G}_2 \quad -\tilde{G}_{2c}] \begin{bmatrix} \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_c \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & \tilde{H}_{1L} & 0 & \tilde{H}_{1c} \\ 0 & 0 & \tilde{H}_2 & \tilde{H}_{2c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_{1L} & 0 & \tilde{G}_{1c} \\ 0 & 0 & \tilde{G}_2 & -\tilde{G}_{2c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_c \end{bmatrix} \quad (32)$$

olarak bulunur.

(32) denklemi,  $L$  bölgesinin birinci bölgeden çıkarılmasıyla elde edildiğinden, bu denklemden  $L$  bölgesinin katkısı bulunmamaktadır. Bu nedenle,  $L$  bölgesinin katkısı ayrıca belirlenerek (32) denklemine eklenmelidir. Sözü edilen katkı,  $L$  bölgesinin tüm sınırı olan  $S_L$  sınırı üzerinde yerel olmayan sınır şartlarının yazılmasıyla belirlenebilmektedir.  $S_L$  sınırı üzerinde yerel olmayan sınır şartları ise, (8)

şeklinde yazılabilmektedir. (30) ve (31) denklemleri birleştirilirse, Şekil 6'da görülen ve  $L$  bölgesinin çıkarılmasıyla elde edilen, iki malzemeli kompozit için sistem denklemi,

eşitliği ile verilen sistem denkleminin  $L$  bölgesi için yazılmasıyla elde edilebilir. Buna göre,  $L$  bölgesi için (Şekil 6) sistem denklemi,

$$\tilde{H}_L \tilde{u}_L = -\tilde{G}_L \tilde{t}_L \quad (33)$$

şeklinde yazılabilir.

(33) denkleminin yazılmasında,  $S_L$  sınırı üzerinde deplasman ve gerilme sürekliliğinin sağlandığı kabul edilmektedir (Şekil 6). (33) denklemi aynı zamanda,  $S_L$  sınırı üzerinde yazılan yerel olmayan sınır

şartlarını temsil etmektedir. Böylece, (33) eşitliği (32) denkleminde eklenirse, Şekil 5'te görülen ve üç

farklı malzemeden oluşan cisim için sistem denkleminin,

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & \tilde{H}_{1L} & 0 & \tilde{H}_{1c} \\ 0 & 0 & \tilde{H}_2 & \tilde{H}_{2c} \\ 0 & \tilde{H}_L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & \tilde{G}_{1L} & 0 & \tilde{G}_{1c} \\ 0 & 0 & \tilde{G}_2 & \tilde{G}_{2c} \\ 0 & -\tilde{G}_L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_2 \\ \tilde{t}_c \end{bmatrix} \quad (34)$$

şeklinde bulunur. (34) denkleminin sağ tarafında görülen, bilinmeyen  $\tilde{t}_L$  ve  $\tilde{t}_c$  vektörleri, denklemin

sol tarafına taşınırsa,

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_1 & \tilde{H}_{1L} & 0 & \tilde{H}_{1c} & -\tilde{G}_{1c} & -\tilde{G}_{1L} \\ 0 & 0 & \tilde{H}_2 & \tilde{H}_{2c} & \tilde{G}_{2c} & 0 \\ 0 & \tilde{H}_L & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_c \\ \tilde{t}_c \\ \tilde{t}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{G}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca,  $S'_1$  ve  $S'_2$  sınırları üzerinde bilinen ve (10) eşitliği ile tanımlanmış olan sınır şartları, (35) denkleminde yerine konularak, tüm bilinmeyenler denklemin sol tarafında toplanırsa, bu denklem,

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \underline{Y} \quad (36)$$

formunda yazılabilir. Burada,  $\underline{A}$  ve  $\underline{B}$  matrisleri, tüm bilinmeyenler denklemin sol tarafında toplanacak şekilde,  $\tilde{H}_1 \leftrightarrow \tilde{G}_1$  ve  $\tilde{H}_2 \leftrightarrow \tilde{G}_2$  matrisleri arasında kolon değişikliği yapılarak elde edilmektedir.  $\underline{X}$  ve  $\underline{Y}$  ise, sırasıyla, bilinmeyen ve bilinen sınır büyüklüklerini temsil etmektedir. Böylece, (36) denkleminin çözümü yapılsa,  $S'_1$  ve  $S'_2$  sınırları üzerinde bilinmeyen sınır büyüklükleri ile  $S_c$  ve  $S_L$  sınırları üzerinde bilinmeyen deplasman ve gerilme vektörü bileşenleri bulunmuş olacaktır. Elde edilen bu büyüklükler kullanılarak, (13) ve (20) denklemleri yardımıyla, birinci ve ikinci bölgeye ait iç noktalarda deplasman ve gerilmeler hesaplanabilmektedir.

### Bilgisayar Programları

Bu çalışmada, yukarıda anlatılan formülasyon ve sayısal yöntemler kullanılarak, genel amaçlı iki adet bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bunlardan CD2NL programı, iki boyutlu dinamik analizde; CD3NL programı ise, üç boyutlu dinamik analizde kullanılmaktadır. Programlar FORTRAN 77 dili ile yazılmıştır. Her iki programda analiz, Fourier dönüşüm uzayında gerçekleştirilmektedir. Dinamik

analiz için hazırlanmış olan programlar, frekansa küçük değerler verilerek statik analiz için de kullanılabilir.

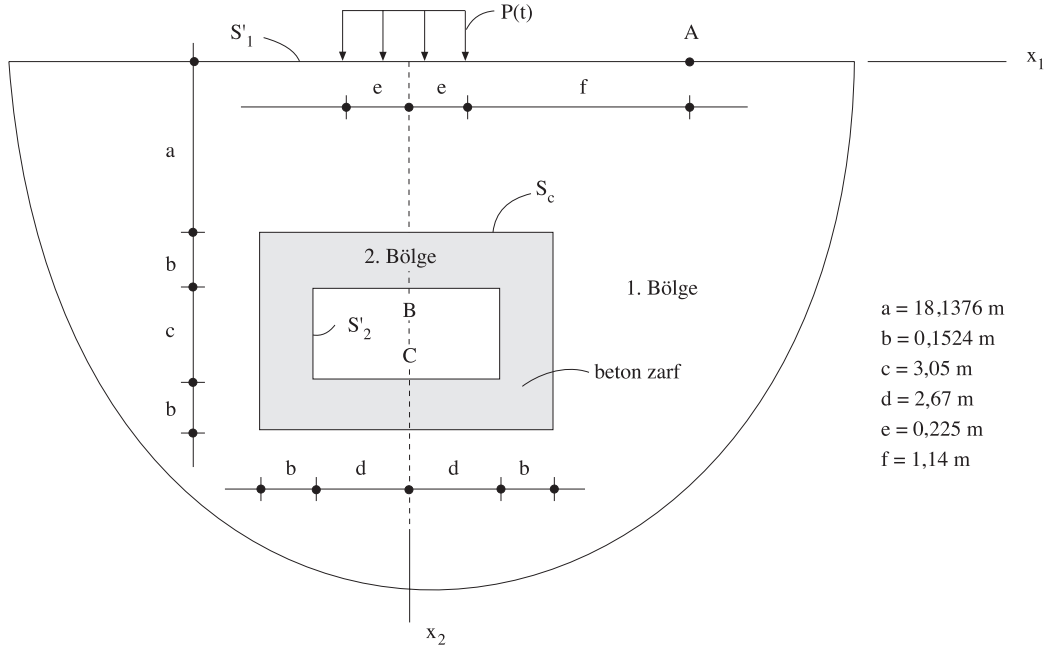
### Örnek Problemler

Bu bölümde, CD2NL ve CD3NL programları ile çözülen problemlerin sonuçları, literatürde verilen sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

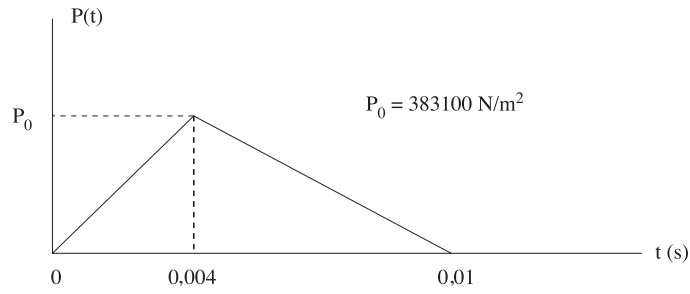
#### Örnek 1. Dikdörtgen Tünel Problemi

Şekil 7'de kesiti görülen yarı sonsuz zemin (yarım uzay) içinde, dikdörtgen bir tünel göz önüne alınmaktadır. Tünelin çevresi beton zarfla kaplanmıştır. Zemin üzerine etki eden uniform yayılı P yükünün zamanla değişimi Şekil 8'de görülmektedir. P yükü etkisiyle A, B ve C noktalarında (Şekil 7) oluşacak düşey deplasmanların zamanla değişimi incelenmektedir. Zemin ve betona ait malzeme özellikleri,

zemin:	
kayma modülü	: $\mu_1 = 470,24 \times 10^6 N/m^2$
Poisson oranı	: $\nu_1 = 0,10$
yoğunluk	: $\rho_1 = 2048 kg/m^3$
histeretik sönüm oranı	: $z_1 = 0,03$
beton:	
kayma modülü	: $\mu_2 = 10622 \times 10^6 N/m^2$
Poisson oranı	: $\nu_2 = 0,17$
yoğunluk	: $\rho_2 = 2263 kg/m^3$
histeretik sönüm oranı	: $z_2 = 0,05$
olarak verilmektedir.	



Şekil 7. Yarı sonsuz zemin (yarım uzay) içinde dikdörtgen tünel

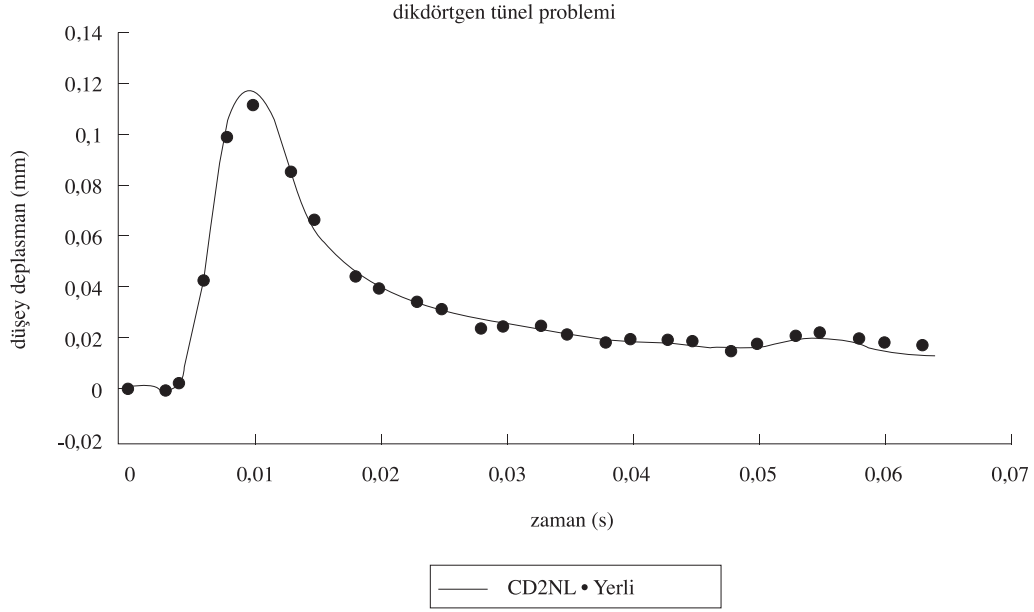


Şekil 8. P yükünün zamanla değişimi

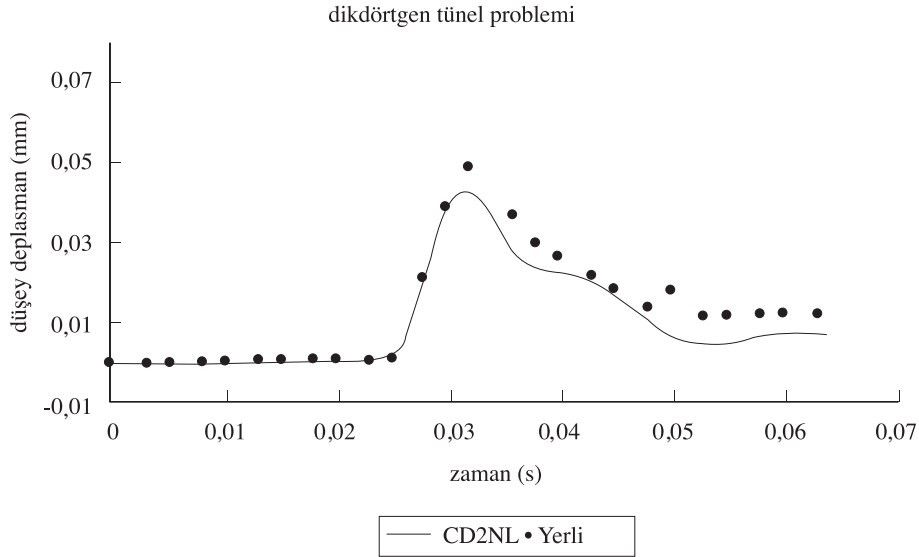
Bu örnek, düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınabilmektedir. Problemin çözümünde CD2NL programı kullanılmaktadır. Problemin çözümünde izlenen yol şöyle özetlenebilir: Öncelikle Şekil 8'de zamanla değişimi verilen P yükünün Fourier dönüşümü alınarak, yükün frekansla değişimi belirlenmektedir. Fourier dönüşümü işleminde, 'Fast Fourier Transform (FFT)' algoritması kullanılmaktadır (Brigham, 1974; Cooley, Lewis ve Welch, 1969). Daha sonra, birim yükleme durumunda, problem, CD2NL programı kullanılarak çeşitli frekans değerleri için çözülmektedir. Her bir frekans için A, B ve C noktalarında hesaplanan düşey deplasman değerleri, aynı frekansa karşılık gelen  $P^F$  değeri ile çarpılarak, deplasmanların

frekansla değişimi, Fourier dönüşüm uzayında, elde edilmektedir (burada üst indis  $F'$ , ilgili büyüklüğün Fourier dönüşümünü göstermektedir). Son olarak, Fourier dönüşüm uzayında elde edilen deplasmanların, FFT algoritması yardımıyla, ters Fourier dönüşümü alınmakta ve böylece, deplasmanların zamanla değişimi belirlenmektedir.

Aynı problem, daha önce Yerli (1998) tarafından sonlu elemanlar yöntemi ile, sonlu ve sonsuz elemanlar kullanılarak çözülmüştür. Bu çalışmada elde edilen deplasman değerleri, Yerli (1998)'nin verdiği sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Şekil 9, 10, 11). Şekillerin incelenmesinden, her iki yöntemle elde edilen sonuçların, birbirleriyle uyum içinde olduğu görülmektedir.



Şekil 9. A noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



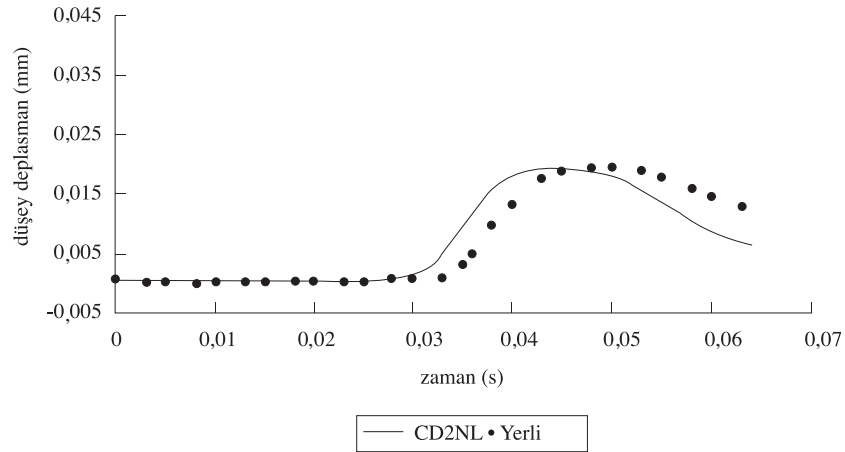
Şekil 10. B noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi

### Örnek 2. Rijit Kare Temel Problemi

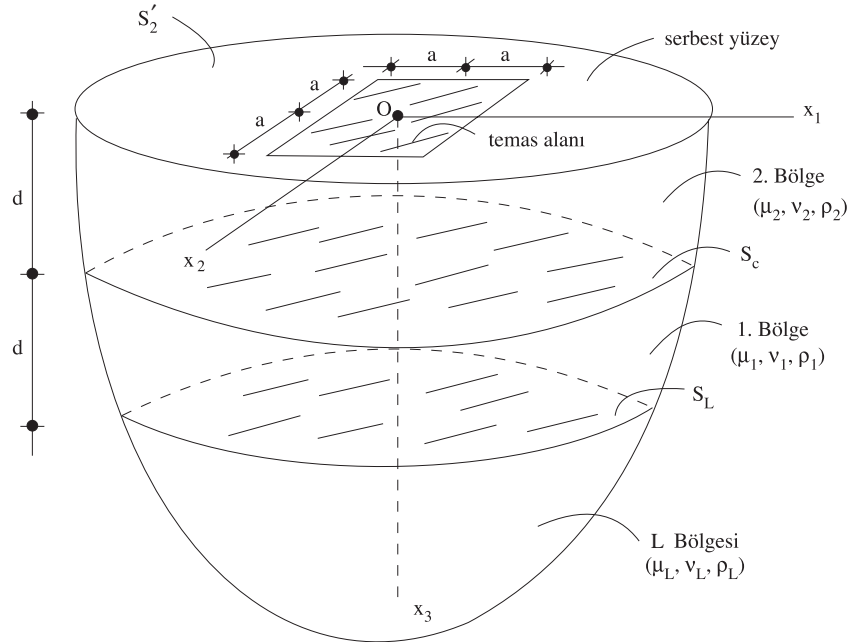
Bu örnekte, elastik iki tabaka ve yarım uzaydan oluşan zemin üzerine oturan ve kenarı  $2a$  uzunluğunda, kütleli rijit kare temelin impedans fonksiyonları incelenmektedir. Temelin zemine tam

bağlı olduğu kabul edilmektedir. Bu nedenle, temel ile zemin arasındaki temas alanı, rijit temel ile uyumlu deplasman yapacaktır (Şekil 12).  $x_1x_2x_3$  eksen takımının orijini ( $O$  noktası), temas alanının ağırlık merkezinde seçilmektedir.

dikdörtgen tünel problemi



Şekil 11. C noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 12. Elastik iki tabaka ve yarım uzaydan oluşan zemin üzerinde rijit kare temel

Rijit kare temele ait deplasman ve dönmeler ile, temel üzerine etki eden kuvvet ve moment bileşkeleri arasında, Fourier dönüşüm uzayında ve deprem hareketinin olmaması durumunda,

$$\underline{F} = \underline{S}\underline{U}$$

eşitliği yazılabilmektedir. Burada  $\underline{F}$ , temel üzerine etki eden kuvvet ve moment bileşkelerinden oluşan, (6x1) boyutunda bir vektördür. Benzer şekilde, (6x1) boyutundaki  $\underline{U}$  vektörü, temele ait dep-

lasman (öteleme) ve dönmeleri içermektedir.  $\underline{F}$  ve  $\underline{U}$  arasındaki ilişkiyi belirleyen  $\underline{S}$  matrisi ise, (6x6) boyutunda, simetrik impedans matrisini göstermektedir.  $\underline{F}$  vektörünün elemanları,

$$\underline{F} = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ M_1 \ M_2 \ M_3]^T$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada  $F_i$  ve  $M_i$  ( $i = 1-3$ ), sırasıyla  $O$  noktasında,  $x_i$  doğrultusundaki bileşke kuvveti ve  $x_i$  etrafındaki bileşke momenti

temsil etmektedir.  $\underline{U}$  vektörünün elemanları ise,

$$\underline{U} = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$$

olarak yazılabilir. Burada,  $u_i$  ve  $\alpha_i$  ( $i = 1-3$ ), sırasıyla, temelin  $x_i$  doğrultusundaki deplasman (öteleme) ve  $x_i$  etrafındaki dönmesini göstermektedir. Bu durumda  $\underline{S}$  matrisinin elemanları,

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_{HH} & 0 & 0 & 0 & S_{HM} & 0 \\ 0 & S_{HH} & 0 & -S_{HM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{VV} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{HM} & 0 & S_{MM} & 0 & 0 \\ S_{HM} & 0 & 0 & 0 & S_{MM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{TT} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada,

- $S_{HH}$  : yatay impedansı;
- $S_{MM}$  : dönme impedansı;
- $S_{HM}$  : girişim(coupling) impedansı
- $S_{VV}$  : düşey impedansı
- $S_{TT}$  : burulma impedansı

göstermektedir.

$\underline{S}$  matrisinin elemanları, birim deplasman yöntemi kullanılarak, CD3NL programı ile hesaplanabilmektedir. Problemin çözümünde,

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1,766, \quad \frac{\mu_L}{\mu_2} = 1,766 \quad (\mu_1 = \mu_L)$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_L = 0,45$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1,13, \quad \frac{\rho_L}{\rho_2} = 1,13 \quad (\rho_1 = \rho_L)$$

$$z_1 = z_L = 0,03 \quad , z_2 = 0,05$$

$$\frac{d}{a} = 1$$

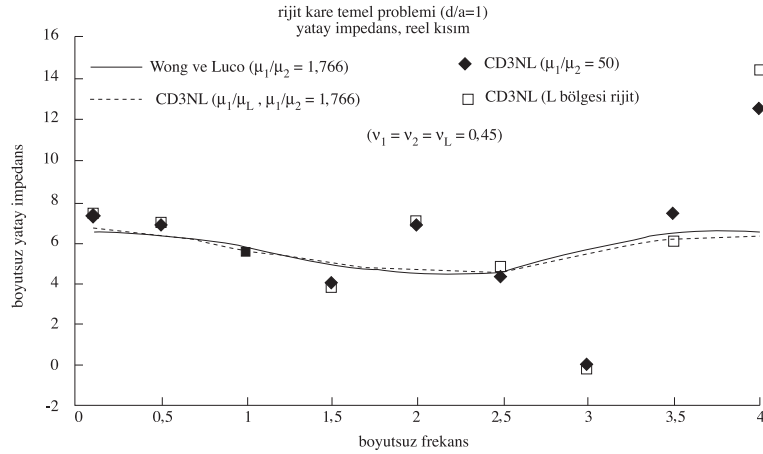
değerleri kullanılmaktadır. Burada,  $z$ , histeretik sönüm oranını göstermektedir.

Analizde birinci bölge ve  $L$  bölgesi için aynı malzeme özellikleri kullanılmaktadır. Burada amaç, Wong ve Luco (1985) tarafından bir tabaka ve yarım uzaydan oluşan zemin üzerine oturan rijit kare temel için verilen sonuçlarla bir karşılaştırma yapmaktır. Diğer bir karşılaştırma yapmak amacıyla,

$$\frac{\mu_L}{\mu_2} = 50 \quad , \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1,766$$

oranları kullanılarak, diğer malzeme özellikleri aynı kalmak koşuluyla,  $\underline{S}$  matrisinin elemanları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar,  $L$  bölgesinin rijit olması durumunda hesaplanan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

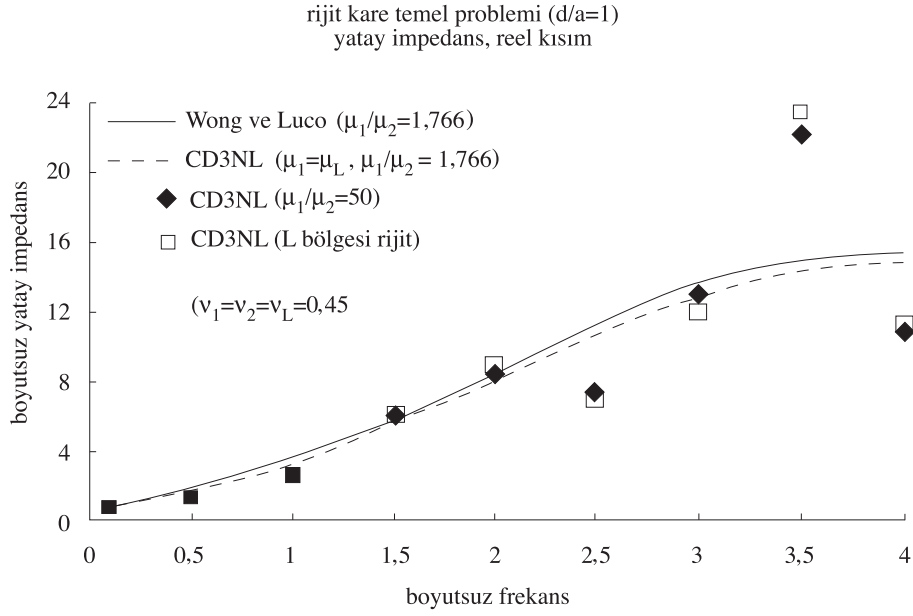
CD3NL programı ile elde edilen,  $S_{HH}$ ,  $S_{VV}$ ,  $S_{MM}$  ve  $S_{TT}$  değerlerinin frekansla değişimleri, Şekil 13-20'de görülmektedir. Şekillerde görülen boyutsuz frekans ( $\bar{\omega}$ ) ve boyutsuz impedans fonksiyonları ( $\bar{S}_{HH}$ ,  $\bar{S}_{VV}$ ,  $\bar{S}_{MM}$  ve  $\bar{S}_{TT}$ ),



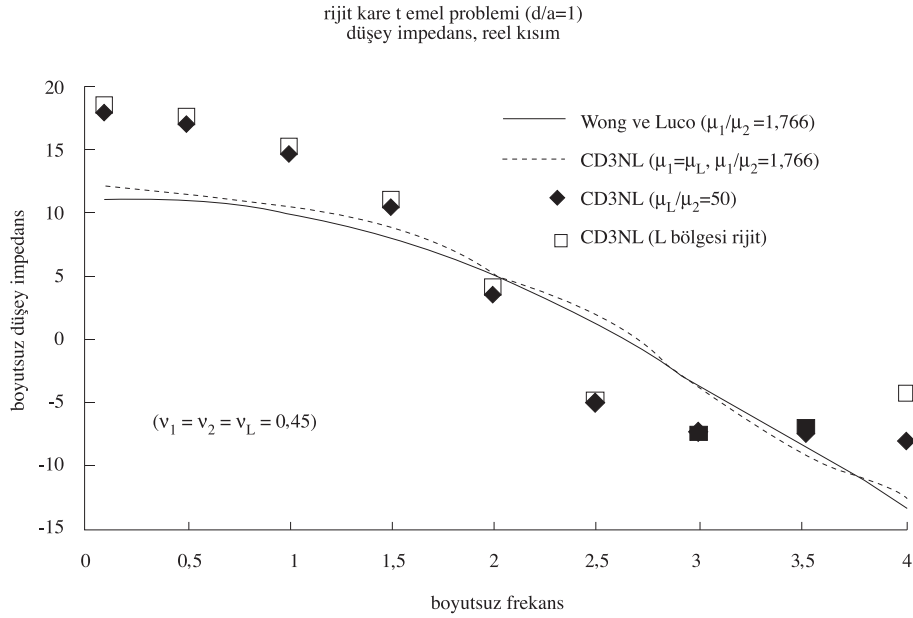
Şekil 13. Yatay impedansın reel kısmının frekansla değişimi

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a}{C_{S1}}, \quad C_{S1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}} \quad \bar{S}_{MM} = \frac{S_{MM}}{\mu_1 a^3}, \quad \bar{S}_{TT} = \frac{S_{TT}}{\mu_1 a^3}$$

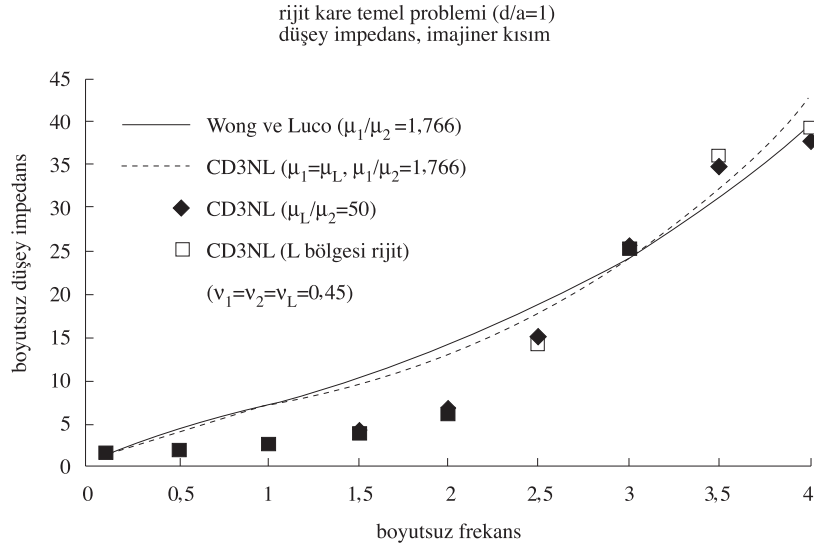
$$\bar{S}_{HH} = \frac{S_{HH}}{\mu_1 a}, \quad \bar{S}_{VV} = \frac{S_{VV}}{\mu_1 a} \quad \text{şeklinde tanımlanmaktadır.}$$



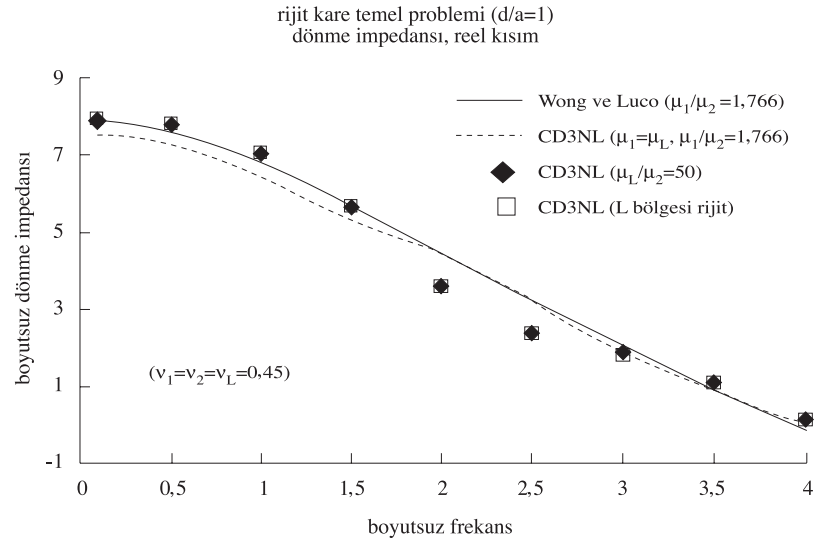
Şekil 14. Yatay impedansın imajiner kısmının frekansla değişimi



Şekil 15. Düşey impedansın reel kısmının frekansla değişimi



Şekil 16. Düşey impedansın imajiner kısmının frekansla değişimi



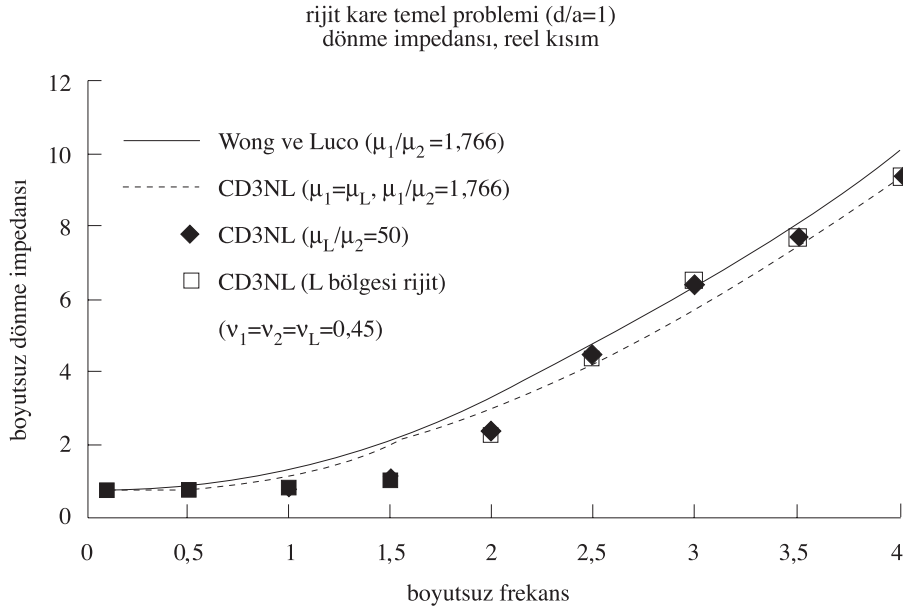
Şekil 17. Dönme impedansının reel kısmının frekansla değişimi

## Sonuçlar

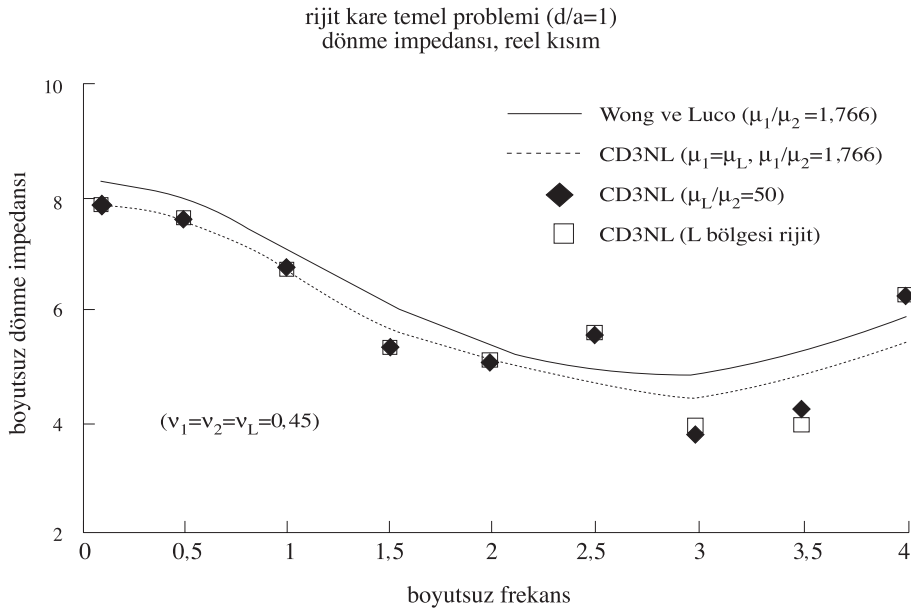
Bu çalışmada, iki ve üç malzemeli kompozitin dinamik analizi için sınır eleman formülasyonu yapılmıştır. Fourier dönüşüm uzayında yapılan formülasyonda, sabit eleman modeli kullanılmıştır. Formülasyonda göz önüne alınan cisim, malzeme özellikleri farklı iki bölgeden (birinci bölge ve ikinci bölge) oluşmaktadır. Ayrıca, tamamının birinci bölgenin içinde kaldığı kabul edilen ve malzeme özellikleri birinci ve ikinci bölgenin malzeme

özelliklerinden farklı olan, üçüncü bir bölge ( $L$  bölgesi) tanımlanmaktadır. Birinci ve ikinci bölge için yazılan sınır eleman denklemleri, iki bölgenin ara yüzeyinde deplasman ve gerilme sürekliliği sağlanacak şekilde birleştirilmektedir. Birinci bölge ile  $L$  bölgesinin ara yüzeyinde ise, yerel olmayan sınır şartları kullanılmaktadır. Bu amaçla,  $L$  bölgesine ait sınır eleman denklemi yazılmakta, birinci bölge ile  $L$  bölgesinin ara yüzeyinde deplasman ve gerilme sürekliliğinin sağlandığı kabul edilmektedir.





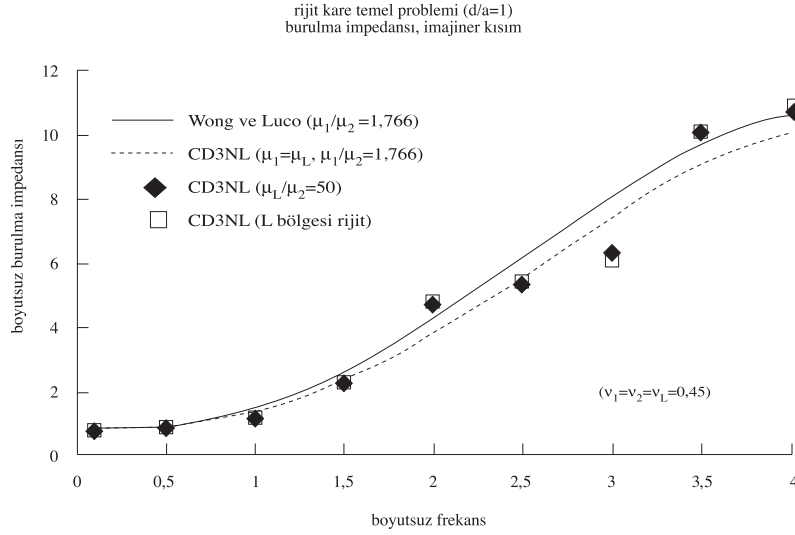
Şekil 18. Dönme impedansının imajiner kısmının frekansla değişimi



Şekil 19. Burulma impedansının reel kısmının frekansla değişimi

Yapılan formülasyona dayalı, genel amaçlı iki adet bilgisayar programı (CD2NL ve CD3NL) hazırlanmıştır. Bunlardan, CD2NL programı iki boyutlu analizde, CD3NL programı ise üç boyutlu analizde kullanılmaktadır. Yapılan formülasyonu irdelemek amacı ile sözü edilen prog-

ramlar iki probleme uygulanmıştır. Problemlerin çözümünden elde edilen sonuçlar, literatürde verilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve bu çalışmada yapılan formülasyonun ve hazırlanan programların güvenle kullanılabilceği sonucuna varılmıştır.



**Şekil 20.** Burulma impedansının imajiner kısmının frekansla değişimi

### Semboller

$A$	: sabit nokta
$a_s$	: sabit noktanın $x_s$ koordinatı
$c_{ijsl}$	: elastik katsayılar
$c_p$	: P dalgası hızı
$c_s$	: S dalgası hızı
$\underline{f}$	: hacim kuvvetleri vektörü
$\underline{G}$	: birinci temel çözümler
$\underline{H}$	: ikinci temel çözümler
$\underline{I}$	: birim matris
$\underline{n}$	: birim dış normal
$P$	: integrasyon noktası
$S$	: cismin sınır yüzeyi

$\underline{S}$	: impedans matrisi
$\underline{t}$	: gerilme vektörü
$\underline{u}$	: deplasman vektörü
$V$	: cismin hacmi
$\underline{X}$	: bilinmeyen sınır büyüklükleri vektörü
$\underline{Y}$	: bilinen sınır büyüklükleri vektörü
$\omega$	: açısal frekans (Fourier dönüşüm parametresi)
$\underline{\tau}$	: gerilme bileşenleri matrisi
$\mu$	: kayma modülü
$\rho$	: kütleli yoğunluk
$\lambda$	: Lamé sabiti
$\nu$	: Poisson oranı
$\delta_{mn}$	: Kronecker delta

### Kaynaklar

Banerjee, P.K., The Boundary Element Methods in Engineering, McGraw-Hill Book Company, London, 1994.

Banerjee, P.K., and Watson, J.O., Developments in Boundary Element Methods-4, Elsevier Applied Science Publishers, London, 1986.

Becker, A.A., The Boundary Element Method in Engineering, McGraw-Hill Book Company, London, 1992.

Beskos, D.E., Boundary Element Methods in Mechanics, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1987.

Brebbia, C.A., and Connor, J.J., Advances in Boundary Elements Vol. 1, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1989.

Brebbia, C.A., and Dominguez, J., Boundary Elements an Introductory Course, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1989.

Brigham, E.O., The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

Cheng, A.H-D., Brebbia, C.A., and Grilli, S., Computational Engineering with Boundary Elements Vol. 2, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1990.

- Cooley, J.W., Lewis, P.A.W., and Welch, P.D., The Fast Fourier Transform and Its Applications, IEEE Trans., Education, 12: 27-34, 1969.
- Mackerle, J., and Brebbia, C.A., The Boundary Element Reference Book, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1988.
- Manolis, G.D., and Beskos, D.E., Boundary Element Method in Elastodynamics, Unwin Hyman, London, 1987.
- Mengi, Y., Tanrikulu, A.H., and Tanrikulu, A.K., Boundary Element Method for Elastic Media, An Introduction, ODTÜ Basım İşliği, Ankara, 1994.
- Özkan, G., Mengi, Y., On The Use of FFT Algorithm For The Circumferential Co-ordinate In Boundary Element Formulation Of Axisymmetric Problems, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 40: 2385-2412, 1997.
- Partridge, P.W., Brebbia, C.A., and Wrobel, L.C., The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier Applied Science, London, 1992.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., and Vetterling, V.T., Numerical Recipes, Cambridge University Press, New York, 1986.
- Tanaka, M., Brebbia, C.A., and Shaw, R., Advances in Boundary Element Methods in Japan and USA, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1990.
- Trevelyan, J., Boundary Elements for Engineers, Theory and Applications, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1994.
- Wong, H.L., and Luco, J.E., Tables of Impedance Functions for Square Foundations on Layered Medium, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 4(2): 64-81, 1985.
- Yerli, H.R., İki ve Üç Boyutlu Dinamik Yapı-Zemin Etkileşimi Problemlerinin Sonlu ve Sonsuz Elemanlar Kullanılarak Analizi, Doktora Tezi, Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 1998.