

Değişken Kalınlıklı Homojen Olmayan Elastik Silindirik İnce Kabukların Dinamik Dış Basınç Yükü Etkisi Altında Stabilitesi

Abdullah H. SOFİYEV, Hakan ERDEM
Ondokuz Mayıs Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü,
55139, Kurupelit, Samsun-TÜRKİYE

Geliş Tarihi 12.03.2001

Özet

Bu makalede kalınlığı uzunluk koordinatına göre, elastik özellikleri ise kalınlık koordinatına göre sürekli değişen elastik silindirik ince kabukların zamana göre kuvvet fonksiyonu şeklinde değişen uniform dış basınç yükü etkisi altındaki stabilitesi araştırılmaktadır. Önce, değişken kalınlıklı homojen olmayan elastik silindirik ince kabukların temel bağıntı ve değiştirilmiş Donell tip stabilite denklemleri çıkarılmaktadır. Galerkin yöntemi uygulanarak zamana bağlı değişken katsayılı diferansiyel denklem elde edilmekte ve bu denklemlere Sachenkov and Baktieva (1978), yöntemi uygulanarak, statik ve dinamik kritik yükler, onlara karşı gelen dalga sayıları ve dinamiklik katsayısı için genel formüller elde edilmektedir. Bu formüllerden sabit kalınlıklı homojen ve homojen olmayan malzemelerden oluşan elastik silindirik ince kabuklar için uygun formüller özel olarak bulunmaktadır.

Son olarak da hesaplar yapıp kabuk kalınlığının lineer ve sinus fonksiyonları, elastik özelliklerin lineer, parabolik ve üstel fonksiyonlar şeklinde değişiminin ve basıncın zamana göre değişim katsayısı değişiminin kritik parametrelere etkisi incelenmektedir.

Anahtar Sözcükler: Değişken kalınlıklı silindirik ince kabuk, Homojen olmama, Dinamik dış basınç, Stabilite, Kritik yük, Dinamiklik katsayısı

The Stability of Non-Homogeneous Elastic Cylindrical thin Shells with Variable Thickness Under a Dynamic External Pressure

Abstract

The stability of elastic cylindrical thin shells of variable thickness along the directrix and of elastic properties varying continuously depending on the thickness coordinates, subject to a uniform external pressure which is a power function of time, was investigated. Firstly, fundamental relations and the modified Donell-type stability equations of the non-homogeneous elastic cylindrical thin shells with variable thickness were derived. Applying Galerkin's method, a differential equation having a variable coefficient depending on time was obtained and by applying the method of Sachenkov and Baktieva (1978) to these equations, general formulas for static and dynamic critical loads, corresponding wave numbers, and the dynamic factor were obtained. The appropriate formulas for elastic cylindrical thin shells made of homogeneous and non-homogeneous materials with uniform thickness were specifically obtained from these formulas.

Finally, performing the computations, the effects of linear and sinusoidal variation of shell thickness, linear, parabolic, and exponential variation of elastic properties, and the variation of variation factor due to time on critical parameters were investigated.

Key Words: Cylindrical thin shells of variable thickness, Non-homogeneity, Dynamic external pressure, Stability, Critical load, Dynamic factor

Giriş

İnce kalınlıklı kabuklar, basit ve kompleks yapı konfigürasyonlarında, özellikle de roket sanayisinde, başlıca yapı elemanları olarak geniş kullanım alanı bulmaktadırlar. Sabit kalınlıklı kabukların, değişik yükleme durumlarında ve sınır koşullarında, deneylerle uyum sağlayan statik kritik yük değerlerinin bulunabilmesi için çok sayıda çözüm yöntemi vardır. Değişken kalınlıklı kabuklar hakkındaki araştırma yayınları, imalat ve teorik analiz sırasında karşılaşılan zorluklara bağlı olarak sayıca çok sınırlıdır. Değişken kalınlıklı ince kabuklarda malzemenin homojen olmamasının göz önüne alınması bu zorlukları biraz daha artırmaktadır. Bununla beraber, daha az ağırlık, yüksek mukavemet vs gibi avantajlar ve imalat yöntemlerindeki gelişmeler değişken kalınlıklı ve homojen olmayan malzemelerden oluşan yapı elemanlarının gelecekte uygulanabilmesi olasılığını artırır ve yeni hesap metodlarının oluşturulmasını gerektirir. Bu durum, son yıllarda araştırmacıların homojen olmayan malzemelerden oluşturulan cisimlerin elastisite teorisi problemlerine olan ilgisini artırmaktadır. Bu dalda, Lomakin (1976)' in homojen olmayan cisimlerin elastisite teorisi kitabı ilk kapsamlı kaynaklardan biridir. Bilindiği gibi malzeme özelliklerinin homojen olmaması, nem etkisi, ısı ve imalat metodlarından vs. dolayı meydana gelmektedir. Bu etkiler sonucu yapı elemanını oluşturan malzemenin özellikleri nokta koordinatlarının sürekli fonksiyonu olarak homojen olmayan cismin hacmi içinde sürekli ve ya birinci çeşit süreksizliğe sahip olarak değişebilir. Hazırlama şekline ve yapı elemanlarının geometrisine bağlı olarak, malzemenin özellikleri değişik koordinatlara bağlı olarak değişebilir. Brinkman (1954), radyasyon etkisinde olan metal kabukların elastik özelliklerin kalınlık koordinatına bağlı değiştiğini göstermiştir. Massalas ve arkadaşları (1981), elastisite modülü kalınlık koordinatının, Heyliger and Julani (1992), elastisite modülü radyal koordinatının sürekli fonksiyonu olduğu, Gutierrez ve arkadaşları (1998), malzeme yoğunluğunun radyal koordinatın lineer, parabolik ve kübik fonksiyonları şeklinde değiştiği titreşim problemlerini, Sofiyev and Aksogan (1999), Aksogan and Sofiyev (2000), elastisite modülleri ve yoğunluğu değişen bir tabaklı ve çok tabakalı silindirik kabukların ve Sofiyev and Karaca (2001), çok tabakalı konik kabukların stabilite problemlerini ele almışlardır. Zhang and Hasebe (1999), elastisite modülü değişimine sınırlama koymadan, değişim için

radyal koordinatlara bağlı üssel fonksiyonlar kullanmışlardır.

Son yıllarda değişken kalınlıklı kabukların burkulma ve titreşimi ile ilgili de bir çok çalışma yapılmıştır. Ershov ve arkadaşları (1975), kalınlığı değişen silindirik kabuğun üniform ve üniform olmayan dış basınç yükleri etkisi altında statik burkulmasını, Tonin and Bies (1979), kalınlığı çevresel koordinata bağlı değişen silindirik kabukların, Bergman ve arkadaşları (1979), kalınlığı uzunluk koordinatına bağlı sürekli değişen dairesel olmayan silindirik kabukların, Irie ve arkadaşları (1982), Takahashi ve arkadaşları (1985), değişken kalınlıklı konik kabukların, Sankaranarayanan ve arkadaşları (1988) ve Sivadas and Ganesan (1991), değişken kalınlıklı tabakalı konik kabukların değişik yöntemlerle serbest titreşimini, Koiter ve arkadaşları (1994), kalınlığın küçük değişiminde silindirik kabukların eksenel basınç yükü etkisi altında statik burkulma problemini ve Aksogan and Sofiyev (2001) kalınlığı değişen homojen elastik silindirik kabuğun dinamik stabilite problemlerini incelemişler. Bu çalışmalarda genellikle Kirchhoff - Love' in birinci yaklaşım teorisi kullanılmış ve kritik parametrelere kalınlık değişiminin etkisi sayısal olarak kanıtlanmıştır.

Kalınlığı değişen ve homojen olmayan malzemelerden oluşan ince kabukların dinamik stabilite problemi ise bu güne kadar fazla dikkate alınmamıştır. Dinamik problemin çözümü belirli yükleme durumları için dinamiklik katsayısının bulunmasına getirilmektedir. Dinamiklik katsayısı ise dinamik yükün değişim kuralına, özel halde yükleme hızına bağlı olarak değişik yöntemlerle bulunabilmektedir. Bu anlamda, zamana bağlı ani artan yükler etkisi altında dinamik stabilite probleminin çözümü için Sachenkov and Baktieva (1978), tarafından verilen yöntem, ince plak ve kabukların stabilitesinin tahkikinde önemli rol oynamaktadır.

Bu çalışmada amaç, kalınlığı uzunluk koordinatına göre, elastik özellikleri kalınlık koordinatına göre sürekli değişen elastik silindirik ince kabukların zamana göre kuvvet fonksiyonu şeklinde değişen üniform dış basınç yükü etkisi altındaki dinamik stabilitesinin Sachenkov and Baktieva (1978), tarafından verilen yöntemle araştırılmasıdır.

Temel Bağntı ve Denklemler

Uzunluğu L , kalınlığı h ve yarıçapı r olan, homojen olmayan elastik malzemeden oluşan dairesel silindirik ince kabuk, kenarlardan mafsallı ol-

sun. Kartezyen sistemini öyle seçelim ki, Oz eksenini kabuğun orta yüzeyinin normaline doğrultusunda olsun, Ox ve Oy eksenleri ise eksene ve çevresel doğrultularla çakışsın (Şekil 1).

Kabuk kalınlığı uzunluk koordinatına bağlı olarak sürekli değişmekte ve

$$\begin{aligned} h &= h_0 \phi(\bar{x}), \quad \phi(\bar{x}) = 1 + \alpha f(\bar{x}), \\ h_{\max} &= h_0(1 + \alpha), \quad \bar{x} = x/L \end{aligned} \quad (1)$$

ifadesi ile verilmektedir. Burada, h_0 kabuğun minimum sabit kalınlığı, h_{\max} kabuğun maksimum kalınlığı, $0 \leq \alpha < 1$ kalınlık değişiminin boyutsuz parametresi, $f(\bar{x})$ kabuğun kalınlık değişimine karşı gelen sürekli ve ikinci mertebeye dek diferansiyelenebilir boyutsuz fonksiyon olup, $|f(\bar{x})| \leq 1$ (Ershov ve arkadaşları 1975) ve (Sivadas and Ganesan 1991).

Malzemenin elastisite modülü ve yoğunluğu kalınlık koordinatının sürekli fonksiyonları olmakta ve

$$E(\bar{z}) = E_0 \bar{\varphi}_1(\bar{z}), \quad \rho(\bar{z}) = \rho_0 \bar{\varphi}_2(\bar{z}), \quad \bar{z} = z/h \quad (2)$$

şeklinde verilmektedir. Burada, E_0 ve ρ_0 homojen malzemenin elastisite modülü ve yoğunluğu, $\bar{\varphi}_i(\bar{z}) = 1 + \mu \varphi_i(\bar{z})$, ($i = 1, 2$) ve $\varphi_i(\bar{z})$ elastisite modülü ve yoğunluğun değişimine karşı gelen sürekli fonksiyonlar olup, $|\varphi_i(\bar{z})| \leq 1$, μ ise elastisite modülü ve yoğunluğun değişim katsayısı olup, $0 \leq \mu < 1$.

Kirchhoff - Love'in birinci yaklaşım teorisine göre deformasyon z kalınlık koordinatının lineer fonksiyonu olarak

$$[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}] = [e_x + z\chi_x, e_y + z\chi_y, e_{xy} + z\chi_{xy}] \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$[\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}] = [-w_{,xx}, -w_{,yy}, -w_{,xy}] \quad (4)$$

olup, e_x ve e_y sırasıyla orta yüzeyde Ox ve Oy eksenleri doğrultusunda deformasyonlar, e_{xy} kayma deformasyonu, χ_x ve χ_y sırasıyla deformasyona maruz kabuğun Ox ve Oy eksenleri doğrultusundaki eğrilik değişimleri, χ_{xy} orta yüzeyin burulması, w orta yüzey noktalarının silindirik yüzeyinin iç normaline doğrultusundaki yerdeğiştirmesidir.

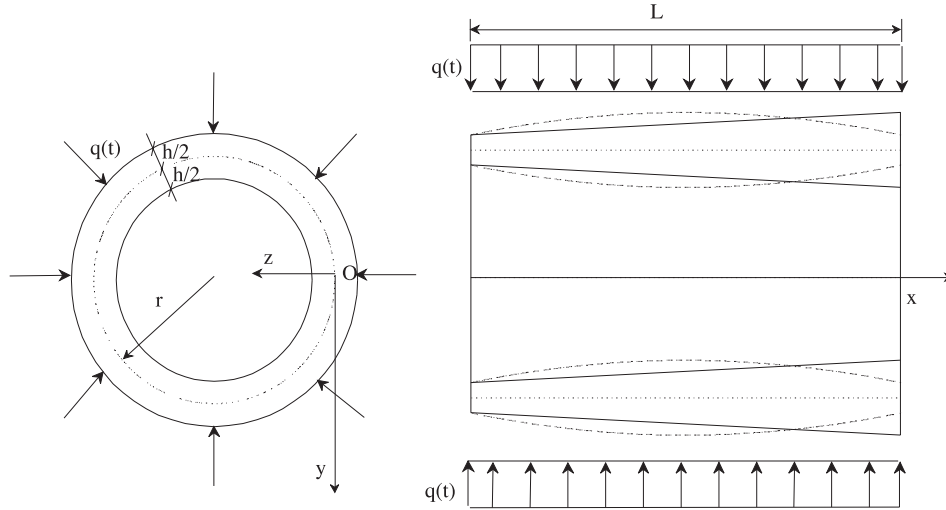
Elastik özellikleri kalınlık koordinatına göre sürekli değişen ince kalınlıklı silindirik kabuklar için gerilme ve deformasyon arasındaki bağıntı

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

şeklinde verilmektedir. Burada,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_0[1 + \mu \varphi_1(\bar{z})]/(1 - \nu^2), \\ Q_{12} &= \nu Q_{11}, \quad Q_{33} = (1 - \nu) Q_{11} \end{aligned} \quad (6)$$

tanımları geçerli olup, ν Poisson oranıdır. Birim boyutlu kabuk elemanı kesitine etkiyen iç kuvvet ve momentler, şu şekilde ifade edilebilir:



Şekil 1. Kalınlığı uzunluk koordinatına göre değişen silindirik kabuğun geometrisi.

- · · ·, $f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}$; —, $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

$$[T_x, T_y, T_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}] dz, \quad (7)$$

$$[M_x, M_y, M_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}] z dz$$

$[T_x, T_y, T_{xy}]$ kuvvetleri ile $\bar{\Phi} = \Phi/h_0$ gerilme fonksiyonu arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$[T_x, T_y, T_{xy}] = [\bar{\Phi},_{yy}, \bar{\Phi},_{xx}, -\bar{\Phi},_{xy}] \quad (8)$$

Zamana bağlı kuvvet fonksiyonu şeklinde değişen üniform dış basınç yükü etkisi altında olan silindirik ince kabuğun dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemi şu şekildedir (Wolmir 1967):

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + T_y/r - r(q_1 + q_0 t^k) w_{,yy} = \tilde{\rho} h_0 \phi(\bar{x}) w_{,tt} \quad (9)$$

$$L_{11} = b_1[\phi(\bar{x}),_{xx}(\bullet),_{yy} + (\bullet),_{xx}/r, \quad L_{22} = b_1[\phi(\bar{x}),_{xx}(\bullet),_{yy} + (\bullet),_{xx}/r,$$

$$L_{12} = -b_2\{\phi^3(\bar{x})(\bullet),_{xxx} + 2[\phi^3(\bar{x}),_x(\bullet),_{xx} + [\phi^3(\bar{x}),_{xx}[(\bullet),_{xx} + \nu(\bullet),_{yy}] + \phi^3(\bar{x})(\bullet),_{yyy}]\} -$$

$$-2(b_3 + \nu b_2)\{[\phi^3(\bar{x}),_x(\bullet),_{yy} + \phi^3(\bar{x})(\bullet),_{xyy}]\} - r(q_1 + q_0 t^k)(\bullet),_{yy} - \tilde{\rho} \phi(\bar{x}) h_0(\bullet),_{tt} \quad ,$$

$$L_{21} = b_4\{2[\phi^{-1}(\bar{x}),_x(\bullet),_{xx} + [\phi^{-1}(\bar{x}),_{xx}[(\bullet),_{xx} - \nu(\bullet),_{yy}] + \phi^{-1}(\bar{x})(\bullet),_{yyy}]\} +$$

$$+ b_4 \phi^{-1}(\bar{x})(\bullet),_{xxx} + 2(b_5 - \nu b_4)\{[\phi^{-1}(\bar{x}),_x(\bullet),_{yy} + \phi^{-1}(\bar{x})(\bullet),_{xyy}]\} \quad (13)$$

(13) ifadelerinde $[\phi(\bar{x}),_{xx} = \frac{\partial^2 \phi(\bar{x})}{\partial x^2}$, $(\bullet),_{xyy} = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ vs olup, şu tanımlar geçerlidir:

$$b_1 = a_{11}^1/a_{11}^0, \quad b_2 = -(a_{11}^1)^2/a_{11}^0 + a_{11}^2, \quad b_3 = -a_{33}^1 b_1 + a_{33}^2, \quad b_4 = [a_{11}^0(1 - \nu^2)]^{-1},$$

$$b_5 = 1/a_{33}^0, \quad a_{11}^j = \frac{E_0 h_0^{j+1}}{1 - \nu^2} \int_{-1/2}^{1/2} \bar{z}^j [1 + \mu \varphi_1(\bar{z})] d\bar{z}, \quad a_{33}^j = (1 - \nu) a_{11}^j, \quad j = 0, 1, 2, \quad (14)$$

Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Silindirik kabuk kenarlarından mafsallı olduğundan (12) denklemler sisteminin çözümü aşağıdaki gibi aranır:

$$w = \xi_1(t) \sin m\pi \bar{x} \sin n\bar{y}, \quad (15)$$

$$\Phi = \xi_2(t) \sin m\pi \bar{x} \sin n\bar{y}, \quad \bar{y} = y/r$$

Burada, m eksenel doğrultuda yarım dalga sayısı ve n çevresel doğrultuda dalga sayısı, $\xi_1(t)$ ve $\xi_2(t)$ zamana bağlı genliklerdir. (15) ifadeleri (12) denklemler sisteminde yerine yazılıp, $0 \leq \bar{x} \leq 1$ ve

$$e_{x,yy} + e_{y,xx} - 2e_{xy,xy} = -w_{,xx}/r \quad (10)$$

Burada, q_1 statik dış basınç, q_0 yükleme hızı, $k \geq 1$ basıncın zamana göre değişimini gösteren kuvvet katsayısı ve t zaman olup, şu tanım geçerlidir:

$$\tilde{\rho} = \rho_0 \int_{-1/2}^{1/2} [1 + \mu \varphi_2(\bar{z})] d\bar{z} \quad (11)$$

(1-8) ifadeleri (9) ve (10) denklemler sisteminde yerine yazıldığında, bazı işlemlerden sonra aşağıdaki matris şeklindeki denklemler sistemi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ w \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

Burada, $L_{ij}(i, j = 1, 2)$ diferansiyel operatör olup, şu şekilde tanımlanmaktadır:

$0 \leq \bar{y} \leq 2\pi$ aralığında Galerkin yöntemi uygulandığında, elde edilen denklemlerden $\xi_2(t)$ yok edildiğinde ve dalga parametreleri $m = 1$ olduğunda orta uzunluklu ince kabuklar için $n^4 \gg \omega^4$ eşitsizliğinin sağlandığı düşünülürse (Sachenkov and Baktieva 1978),

$$\xi_{1,\tau\tau} + (\rho_1 h_0 r^4)^{-1} [\lambda_1 n^4 + 0, 25\omega^4 r^2 \lambda_2^{-1} n^{-4} - 0, 5r^3 (q_1 + q_0 t_{kr}^k \tau^k) n^2] t_{kr}^2 \xi_1(\tau) = 0 \quad (16)$$

zamana bağlı değişken katsayılı diferansiyel denklemi elde edilir. Burada, $\omega = \pi r/L$, t_{kr} kritik zaman olup,

$t = \tau t_{kr}$, τ boyutsuz zaman parametresi ve $0 \leq \tau \leq 1$ olup, aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= b_2 \int_0^1 \phi^3(\bar{x}) \sin^2 \pi \bar{x} d\bar{x}, \\ \lambda_2 &= b_4 \int_0^1 \phi^{-1}(\bar{x}) \sin^2 \pi \bar{x} d\bar{x}, \\ \rho_1 &= \tilde{\rho} \int_0^1 \phi(\bar{x}) \sin^2 \pi \bar{x} d\bar{x}\end{aligned}\quad (17)$$

(16) diferansiyel denkleminde Sachenkov and Baktieva (1978), yöntemi uygulandığında,

$$\begin{aligned}q_0 t_{kr}^k &= \theta_1 [2\lambda_1 r^{-3} n^2 + 0,5\omega^4 \lambda_2^{-1} r^{-1} n^{-6} - q_1] + \\ &+ 2t_{kr}^{-2} n^{-2} \theta_2 \rho_1 h_0 r\end{aligned}\quad (18)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Burada, θ_1 ve θ_2 aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\int_0^1 [\xi_1(\tau)]^2 d\tau}{2 \int_0^1 \int_0^\tau \eta^k \xi_1'(\eta) \xi_1(\eta) d\eta d\tau}, \\ \theta_2 &= \frac{\int_0^1 [\xi_2'(\tau)]^2 d\tau}{2 \int_0^1 \int_0^\tau \eta^k \xi_2'(\eta) \xi_2(\eta) d\eta d\tau}\end{aligned}\quad (19)$$

Tablo 1. Basıncın zamana göre değişimine karşı gelen θ_1 ve θ_2 ifadelerinin değişimi

$\xi_1(\tau) = Ae^{50\tau} \tau(52/51 - \tau),$ $\xi_1(0) = \xi_1(1) = 0$				
k	1,0	2,0	3,0	4,0
θ_1	1,0366	1,0740	1,1124	1,1517
θ_2	539,95	559,46	579,46	599,948

$q_0 t_{kr}^k$ fonksiyonu n^2 ye göre minimize edildiğinde kritik yükün bulunması için,

$$q_0 t_{kr}^k = \theta_1 [4\lambda_1 r^{-3} n^2 - \omega^4 \lambda_2^{-1} r^{-1} n^{-6} - q_1] \quad (20)$$

denklemi elde edilir. (18) ve (20) denklemlerinden t_{kr} yok edildiğinde,

$$(1-3p)^{2k/(1+k)} (1-p-\bar{q}_1 p^{0,25})^{4/(1+k)} = p \delta^{2k/(1+k)} \quad (21)$$

denklemi elde edilir. Burada ise,

$$p = 0,25\omega^4 r^2 \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} n^{-8},$$

$$\begin{aligned}\bar{q}_1 &= 2^{-1,5} \lambda_1^{-0,75} \omega^{-1} r^{2,5} \lambda_2^{0,25} q_1, \\ \delta &= 2^{(k-3)/k} q_0^{2/k} r^{(5+3k)/k} \lambda_2^{0,5(1+k)/k} \\ \lambda_1^{-0,5(3+k)/k} \omega^{-2(1+k)/k} \theta_1^{-(2+k)/k} \theta_2 \rho_1 h_0\end{aligned}\quad (22)$$

tanımları geçerlidir. $q_1 = 0$ olduğunda $p < 1$ ve denklemin sağ ve sol tarafındaki sayılar pozitif olduğundan birinci yaklaşımda,

$$\begin{aligned}(1-3p)^{2k/(1+k)} &\approx 1 - 6k(1+k)^{-1} p, \\ (1-p)^{4/(1+k)} &\approx 1 - 4(1+k)^{-1} p\end{aligned}\quad (23)$$

elde edilir. (23) ifadeleri (21) denkleminde yerine yazılıp ve $q_0 \geq 200MPa/s^k$ için $\delta \gg 1$ olduğu dikkate alındığında,

$$p \approx \delta^{-2k/(1+k)} \quad (24)$$

ifadesi elde edilir. (24) ifadesi (22) ifadelerinin birincisinde yerine yazıldığında dinamik kritik yüke karşı gelen dalga sayısı için,

$$n_d^2 = 0,7071r^{0,5} \lambda_1^{-0,25} \lambda_2^{-0,25} \delta^{k/(2+2k)} \omega \quad (25)$$

ifadesi elde edilir. n_d^2 ifadesi (20) denkleminde yerine konursa, dinamik kritik yük için,

$$q_{kr}^d = q_0 t_{kr}^k = 2,8284 \lambda_1^{0,75} \lambda_2^{0,25} r^{-2,5} \delta^{0,5k/(1+k)} \theta_1 \omega \quad (26)$$

ifadesi elde edilir. Statik durumda ($t_{kr} \rightarrow \infty, q_0 \rightarrow 0$), statik kritik yüke karşı gelen dalga sayısı için,

$$n_{st}^2 = 0,9306r^{0,5} \lambda_1^{-0,25} \lambda_2^{-0,25} \omega \quad (27)$$

ifadesi elde edilir. n_{st}^2 ifadesi (20) denkleminde yerine yazıldığında, q_{kr}^d/θ_1 yerine q_{kr}^{st} yazdığımızda, statik kritik yük için,

$$q_{kr}^{st} = 2,4816r^{-2,5} \lambda_1^{0,75} \lambda_2^{-0,25} \omega \quad (28)$$

dinamiklik katsayısı için ise,

$$K_d = q_{kr}^d/q_{kr}^{st} = 1,1398\delta^{0,5k/(1+k)} \quad (29)$$

ifadeleri elde edilir. (26), (28) ve (29) ifadelerinden $k = 1, \alpha = 0$ ve $\mu = 0$ olduğunda sabit kalınlıklı homojen izotrop elastik silindirik ince kabuk için aşağıdaki ifadeler özel olarak elde edilir (Sachenkov and Baktieva 1978):

$$q_{kr}^d = 3,696(1-\nu^2)^{-0,25} E_0^{0,5} V^{-0,5} r^{-0,5} q_0^{0,5} h \quad (30)$$

$$q_{kr}^{st} = 0,886(1-\nu^2)^{-0,75} E_0 L^{-1} h^{2,5} r^{-1,5} \quad (31)$$

$$K_d = 4.208(1-\nu^2)^{0,5} E_0^{-0,5} V^{-0,5} h^{-1,5} q_0^{0,5} Lr \quad (32)$$

Burada, $\rho_0 = E_0/V^2$ gözönüne alınmış, V izotrop malzemede sesin yayılma hızıdır.

Sayısal Hesaplar ve Analiz

Bu bölümde, elde edilen formüllerden homojen ve homojen olmayan malzemelerden oluşan kalınlığı uzunluk koordinatına göre sürekli değişen ve sabit kalınlıklı silindirik ince kabukların kritik parametre değerlerinin bulunması için sayısal hesaplar yapılmaktadır.

Kabuk Kalınlığının Değişimi

Silindirik kabuğun kalınlığının uzunluk koordinatına bağlı değişimi (Şekil 1)

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x}) &= 1 + \alpha f(\bar{x}), \quad f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \\ h_{\max} &= h_0 (1 + \alpha) \end{aligned} \quad (33)$$

şeklinde verilmiş olsun (Ershov ve arkadaşları 1975).

Silindirik kabuğun kalınlığının uzunluk koordinatına bağlı değişimi (Şekil 1)

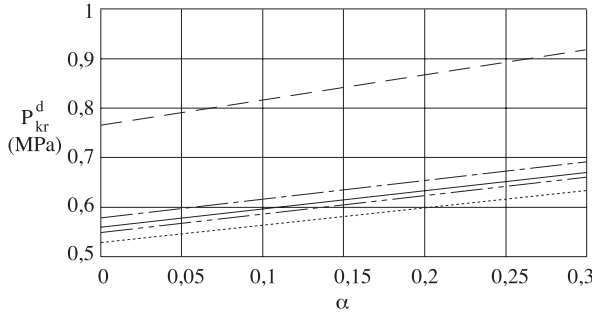
$$\phi(\bar{x}) = 1 + \alpha f(\bar{x}), \quad f(\bar{x}) = \bar{x}, \quad h_{\max} = h_0 (1 + \alpha) \quad (34)$$

şeklinde verilmiş olsun (Irie ve arkadaşları 1982).

Elastisite Modülü ve Yoğunluğunun Değişimi

Silindirik kabuğu oluşturan malzemenin elastisite modülü ve yoğunluğunun değişimi,

$$\begin{aligned} \varphi_i(\bar{z}) &= e^{-0,1|\bar{z}|}, \quad \varphi_i(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|} \cos 0,3\bar{z}, \\ \varphi_i(\bar{z}) &= \pm \bar{z}, \quad \varphi_i(\bar{z}) = \pm \bar{z}^2, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (35)$$



Şekil 2. Dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerinin α' ya bağlı değişimi.

$$\begin{aligned} - - - , & f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|}; \quad - - , f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = 0; \\ - \cdot \cdot \cdot - & f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = \pm \bar{z}; \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot , f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = -\bar{z}^2; \\ - \cdot \cdot - & f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = \bar{z}^2. \end{aligned}$$

fonksiyonları şeklinde olsun. Silindirik kabuğu oluşturan malzemenin yoğunluğu sabit, elastisite modülünün değişimi,

$$\varphi_1(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|}, \quad \varphi_2(\bar{z}) = 0 \quad (36)$$

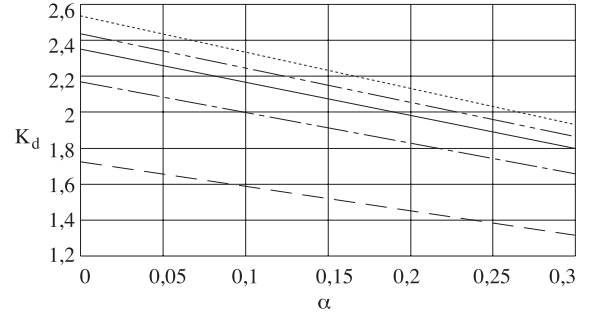
fonksiyonu şeklinde olsun. Silindirik kabuğu oluşturan malzemenin elastisite modülü sabit, yoğunluk değişimi ise

$$\varphi_1(\bar{z}) = 0, \quad \varphi_2(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|} \quad (37)$$

fonksiyonu şeklinde olsun. Bu fonksiyonların değişik koordinatlara bağlı olarak değişik şekillerini Lomakin (1976), Massalas ve arkadaşları (1981), Gutierrez ve arkadaşları (1998), Sofiyev and Aksogan (1999) ve Zang and Hasebe (1999) çalışmalarında kullanmışlar. (35)-(37) formülleri ile verilen fonksiyonların sürekli ve mutlak değerlerinin birden küçük olduğu açıktır. Tüm sayısal hesaplarda elastisite modülü ve yoğunluğunun değişim katsayısı $\mu = 0.9$ göz önüne alınmaktadır.

Sonuçlar ve Analiz

Hesaplar, Wolmir (1967) teorik, Mineev (1970) deney, Sachenkov and Baktieva (1978) teorik ve Tazyukov (1991) teorik hesaplarda kullanmış oldukları $E_0 = 7,75 \times 10^4 \text{MPa}$, $\nu = 0,3$ malzeme sabitleri, $V = 5 \times 10^3 \text{m/s}$ sesin malzemede yayılma hızı, $h_0 = 8 \times 10^{-4} \text{m}$, $r = 9 \times 10^{-2} \text{m}$, $L = 0,2 \text{m}$ kabuk parametreleri, $q_0 = 200 \text{MPa/s}^k$ yükleme hızı ve basıncın zamana göre değişim katsayısının değişik değerleri dikkate alınarak yapılmakta, elde edilen sonuçlar Şekil ve Tablolar olarak sunulmaktadır.



Şekil 2 kalınlığı uzunluk koordinatına bağlı olarak sinus fonksiyonu, elastisite modülü ve yoğunluğu kalınlık koordinatına bağlı olarak lineer, parabolik ve üstel fonksiyonlar şeklinde değişen silindirik ince kabukların α 'nın değişimine karşı gelen dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerini göstermektedir. Tüm şekillerde α 'nın artmasıyla dinamik kritik yükün değerleri artmakta, dinamiklik katsayısı değerleri ise azalmaktadır. $\alpha = 0$ kabuk kalınlığının sabit olduğu durumu göstermektedir. Elastisite modülü ve yoğunluk üstel fonksiyon şeklinde değiştiğinde homojen duruma kıyasla kritik parametre değerlerine etki en fazla olmaktadır. Elastisite modülü ve yoğunluğun değişim fonksiyonu $\varphi_i(\bar{z}) = \pm\bar{z}$ olduğunda her iki fonksiyon için kritik parametre değerleri aynı olmaktadır.

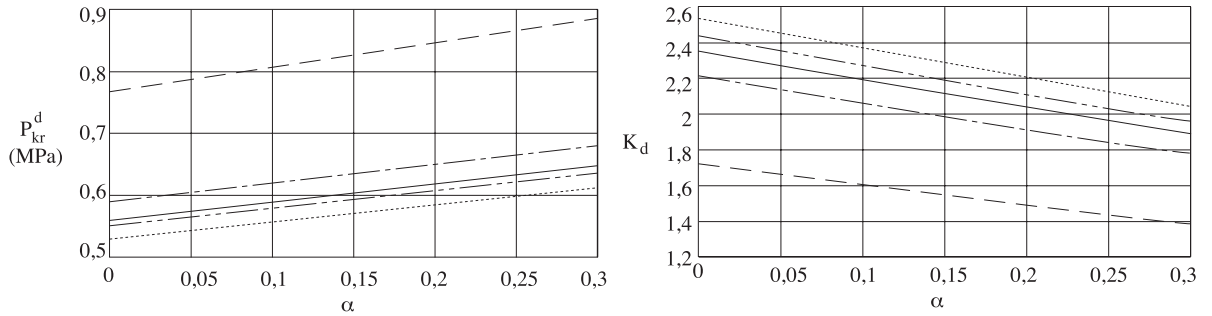
Şekil 3 kalınlığı uzunluk koordinatına bağlı olarak lineer, elastisite modülü ve yoğunluğu kalınlık koordinatına bağlı olarak lineer, parabolik ve üstel fonksiyonlar şeklinde değişen silindirik kabukların α 'nın değişimine karşı gelen dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerini göstermektedir. Elastisite modülü ve yoğunluk lineer, parabolik ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde homojen duruma kıyasla dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerine en fazla etki üstel fonksiyon durumunda olmaktadır. Elastisite modülü ve yoğunluğun değişim fonksiyonunun seçimine bağlı olarak kritik parametre değerleri homojen duruma kıyasla artıp-azalabilir.

Şekil 4 kalınlığı uzunluk koordinatına bağlı sinus fonksiyonu şeklinde değişen, elastisite modülü ve yoğunluğu sabit olan, elastisite modülü ve yoğunluğu kalınlık koordinatına bağlı üstel fonksiyon şeklinde değişen, elastisite modülü kalınlık koordinatına bağlı

üstel fonksiyon şeklinde değişen ve yoğunluğu sabit olan silindirik kabukların α 'nın değişimine karşı gelen dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerini göstermektedir. Dinamik kritik yüke en fazla etki elastisite modülü ve yoğunluğun değiştiği durumda olduğu halde, dinamiklik katsayısına en fazla etki sadece elastisite modülünün değiştiği durumda olmaktadır. Elastisite modülü sabit ve ya yoğunluk sabit olduğunda dinamik kritik yükün değerleri yaklaşık aynı olduğu halde (Şekil 4'de çakışmış görülür), dinamiklik katsayısının değerleri önemli farklılık göstermektedir.

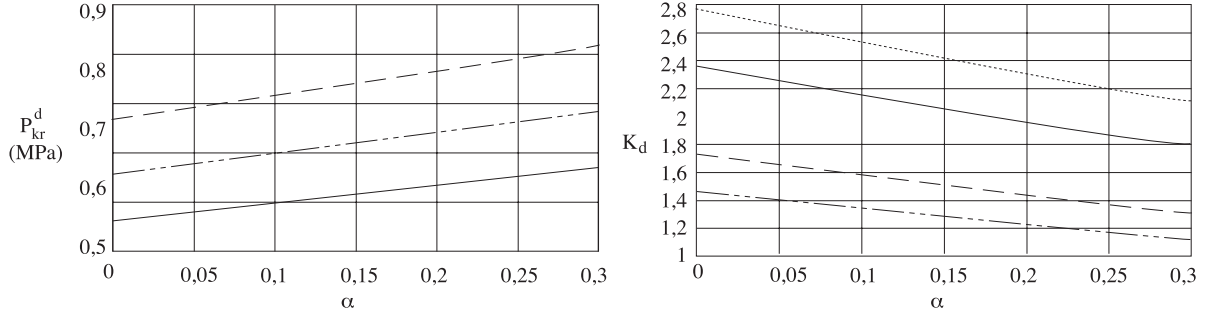
Şekil 5 kalınlığı uzunluk koordinatına bağlı sinus ve lineer fonksiyonlar, elastisite modülü ve yoğunluğu ise kalınlık koordinatına bağlı parabolik fonksiyon şeklinde değişen silindirik kabukların α 'nın değişimine karşı gelen dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerini göstermektedir. Silindirik kabuğun kalınlığı sinus ve lineer fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde kritik parametre değerlerine en fazla etki sinusoidal durumda olmakta ve α arttığında elastisite modülü ve yoğunluğun değişiminin kritik parametre değerlerine etkisinin önemli olduğu görülmektedir.

Tablo 2 basıncın zamana göre değişim katsayısının değişik değerlerinde kalınlığı sinus fonksiyonu şeklinde değişen silindirik kabukların α ve k' nin değişimine karşı gelen dinamik kritik yükler, onlara uygun dalga sayıları ve dinamiklik katsayısı değerlerini göstermektedir. Sabit ve değişken kalınlıklı homojen ve homojen olmayan kabuklarda kritik parametre değerleri k' nin artmasıyla azalmakta, elastisite modülü ve yoğunluk değişiminin ise kritik parametre değerlerine etkisinin önemli olduğu görülmektedir.



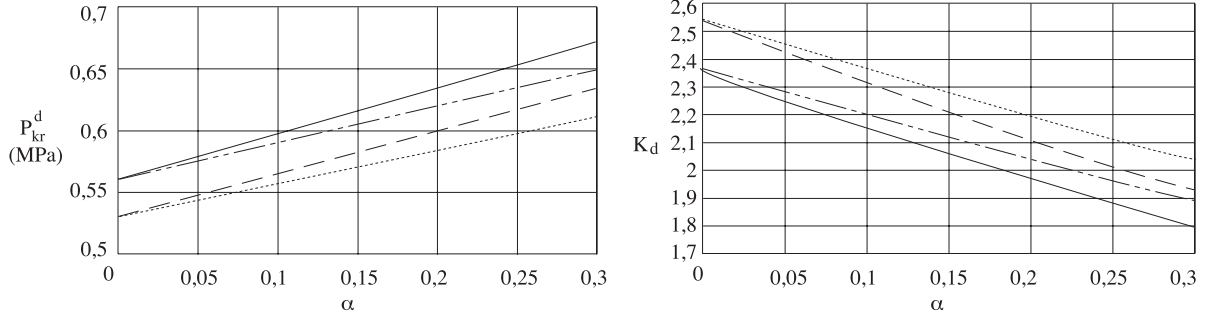
Şekil 3. Dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerinin α ya bağlı değişimi.

$$\begin{aligned}
 \text{---} &, f(\bar{x}) = \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|}; & \text{---} &, f(\bar{x}) = \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = 0; \\
 \text{- - -} &, f(\bar{x}) = \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = \pm\bar{z}; & \text{...} &, f(\bar{x}) = \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = -\bar{z}^2. \\
 \text{- \cdot -} &, f(\bar{x}) = \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = \bar{z}^2.
 \end{aligned}$$



Şekil 4. Dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerinin α 'ya bağlı değişimi.

—, $f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = 0$; - · - ·, $f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|}, \varphi_2(\bar{z}) = 0$;
 - - -, $f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|}$; ·····, $f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = 0, \varphi_2(\bar{z}) = e^{-0,1|\bar{z}|}$.



Şekil 5. Dinamik kritik yük ve dinamiklik katsayısı değerlerinin α 'ya bağlı değişimi.

—, $f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = 0$; - · - ·, $f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = -\bar{z}^2$;
 - - -, $f(\bar{x}) = \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = 0$; ·····, $f(\bar{x}) = \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = -\bar{z}^2$.

Tablo 2. Değişik α ve k değerleri için kritik parametre değerlerinin değişimi

$f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = 0, q_0 = 200MPa/s^k$									
α	$k = 1$			$k = 2$			$k = 3$		
	P_{kr}^d	K_d	n_d	P_{kr}^d	K_d	n_d	P_{kr}^d	K_d	n_d
0	0,5611	2,3565	5	0,0810	0,3403	5	0,0313	0,1316	5
0,05	0,5791	2,2474	5	0,0845	0,3280	5	0,0329	0,1275	5
0,10	0,5973	2,1454	5	0,0881	0,3163	5	0,0344	0,1236	5
0,15	0,6156	2,0500	5	0,0917	0,3053	5	0,0360	0,1199	5
$f(\bar{x}) = \sin \pi \bar{x}, \varphi_1(\bar{z}) = \varphi_2(\bar{z}) = -e^{-0,1 \bar{z} } \cos 0,3\bar{z}, \mu = 0,9, q_0 = 200MPa/s^k$									
0	0,2038	6,3227	11	0,0210	0,6515	3	0,0069	0,2128	5
0,05	0,2104	6,0300	11	0,0219	0,6279	3	0,0072	0,2062	5
0,10	0,2169	5,7564	11	0,0228	0,6056	3	0,0075	0,1999	5
0,15	0,2236	5,5004	10	0,0238	0,5846	3	0,0079	0,1939	5

Burada elde edilen sayısal sonuçların doğruluğunu teyit etmek için kalınlık sabit olduğunda mevcut yöntemle elde edilen kritik parametre değerleri Wolmir (1967) teorik, Mineev (1970) deney, Sachenkov and Baktieva (1978) teorik ve Tazyukov (1991) teorik sonuçlarıyla Tablo 3'de kıyaslanmaktadır. Sabit kalınlıklı ince kabuk için mevcut değerler analitik yaklaşımdaki farklılıklardan

bağımsız olarak diğer yazarlarınkiler ile iyi bir uyum içerisindedirler. Ershov ve arkadaşları (1975) sayısal hesaplar yapmadıkları için, Tonin ve arkadaşları (1979), Bergman ve arkadaşları (1979) silindirik kabuğun serbest titreşimini ve Koiter ve arkadaşları (1994) aksenal basınç yükü etkisi altında burkulma problemini inceledikleri için karşılaştırma yapılmamıştır.

Tablo 3. Kritik parametre değerlerinin teorik ve deney sonuçlarıyla karşılaştırılması ($k = 1$)

q_0 (MPa/s)	Wolmir (1967) teorik		Mineev (1970) deney		Sachenkov and Baktieva (1978) teorik		Tazyukov (1991) (1991) teorik		Bizim sonuçlar üniform kabuk $\alpha = 0$	
	n_d	n_{st}	n_d	n_{st}	n_d	n_{st}	n_d	n_{st}	n_d	n_{st}
200	8	6	7	6	8	6	8	-	7	6
470	9	6	8	6	9	6	9	-	9	6
650	10	6	9	6	10	6	10	-	10	6
	P_{kr}^d (MPa)	K_d	P_{kr}^d (MPa)	K_d	P_{kr}^d (MPa)	K_d	P_{kr}^d (MPa)	K_d	P_{kr}^d (MPa)	K_d
200	0,520	2,180	0,670	2,600	0,590	2,560	0,550	-	0,561	2,357
470	0,740	3,100	0,890	3,240	0,880	3,240	0,860	-	0,860	3,612
650	0,880	3,600	1,060	4,000	1,040	4,100	1,010	-	1,012	4,248

Sonuç

Kalınlığı uzunluk koordinatına göre, elastik özellikleri kalınlık koordinatına göre sürekli değişen silindirik ince kabukların dinamik stabilitesi Sachenkov and Baktieva (1978), tarafından verilen yöntemle incelenmiştir. Zamanın kuvvet fonksiyonu şeklinde değişen uniform dış basınç yükü etkisi altında kalınlığı uzunluk koordinatına göre, elastisite modülü ve yoğunluğu ise kalınlık koordinatına göre değişen silindirik ince kabukların temel bağıntı ve değiştirilmiş Donnell tip dinamik stabilite denklemleri çıkarılmış, sonra Galerkin yöntemi uygulanarak zamana bağlı değişken katsayılı diferansiyel denklem elde edilmiş ve bu denklemlere Sachenkov and Baktieva (1978), yöntemi uygulanarak, statik ve dinamik kritik yükler onlara karşı gelen dalga sayıları ve dinamiklik katsayısı için analitik çözüm bulunmuş, kalınlığın lineer ve sinusoidal ve elastik özelliklerin lineer, parabolik ve üstel fonksiyonlar şeklinde değişiminin kritik parametrelere etkisi sayısal olarak kanıtlanmıştır. Ayrıca, zamanla lineer değişen uniform dış basınç yükü etkisi altındaki sabit kalınlıklı homojen elastik silindirik ince kabuk için kritik parametrelerin deney ve teorik değerlerinin burada elde edilen sayısal sonuçlarla kıyaslanarak doğruluğu kanıtlanmıştır.

Bu makalede elde edilen analitik formüller kalınlığı uzunluk koordinatına göre, elastik özellikleri ise kalınlık koordinatına göre sürekli değişen silindirik ince kabukların kritik parametre değerlerinin bulunması için kullanılabilir.

Teşekkür

Bu çalışmada birinci yazar NATO PC Doktora Sonrası Araştırma Desteği almıştır. Bu çalışmanın

gerçekleşmesine katkısından dolayı TÜBİTAK' a derin teşekkürlerimizi sunuyoruz.

Semboller

E_0	: homojen malzemenin elastisite modülü
h_0	: kabuğun minimum sabit kalınlığı
h_{max}	: kabuğun maksimum kalınlığı
K_d	: dinamiklik katsayısı
L	: kabuğun uzunluğu
M_x, M_y, M_{xy}	: birim boyutlu kabuk elemanı kesitine etkiyen iç momentler
m	: eksenel doğrultuda yarım dalga sayısı
n	: çevresel doğrultuda dalga sayısı
n_{st}, n_d	: statik ve dinamik kritik yüklere karşı gelen dalga sayıları
O_x, O_y, O_z	: kabuğun orta yüzeyinde bulunan eksenler
q_{kr}^{st}	: statik kritik yük
q_{kr}^d	: dinamik kritik yük
q_0, q_1	: yükleme hızı ve statik dış basınç yükü
r	: kabuğun yarıçapı
T_x, T_y, T_{xy}	: birim boyutlu kabuk elemanı kesitine etkiyen iç kuvvetler
t	: zaman
t_{kr}	: kritik zaman
w	: yerdeğiştirme
k	: basıncın zamana göre değişim katsayısı
α	: kalınlık değişiminin boyutsuz parametresi
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0$: orta yüzeyde deformasyonlar
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$: deformasyonlar

$\phi(\bar{x})$: kalınlık değişimine karşı gelen sürekli ve diferansiyellenebilir fonksiyon	ρ_0	: homojen malzemenin yoğunluğu
μ	: elastisite modülü ve yoğunluğun değişim katsayısı	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$: gerilmeler
ν	: homojen malzemenin Poisson katsayısı	τ	: boyutsuz zaman parametresi
		$\xi_1(t), \xi_2(t)$: zamana bağlı genlikler
		$\bar{\Phi}$: gerilme fonksiyonu.

Kaynaklar

Aksogan, O., and Sofiyev, A., “The Dynamic Stability of a Laminated Nonhomogeneous Orthotropic Elastic Cylindrical Shell Under a Time Dependent External Pressure”, International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, Nottingham, United Kingdom, 349-360, 2000.

Aksogan, O., and Sofiyev, A., “Dynamic Buckling of a Cylindrical Shell with Variable Thickness Subject to a Time Dependent External Pressure”, Journal of Sound and Vibration, 2001 (Makale kabul edildi, baskıda).

Bergman, R. M., Sidoren, S. A., and Tovstik, P. E., “Construction of Solutions of the Equations for Free Vibration of a Cylindrical Shell of Variable Thickness Along the Directrix”, Mechanics of Solids, 14, 3, 127-134, 1979.

Brinkman, J. A., “On the Nature of Radiation Damage in Metals”, Journal of Applied Physics, 25, 8, 961-970, 1954.

Gutierrez, R. H., Laura, P. A. A., Bambill, D. V., Jederlinic, V. A., and Hodges, D. H., “Axisymmetric Vibrations of Solid Circular and Annular Membranes with Continuously Varying Density”, Journal of Sound and Vibration, 212, 4, 611-622, 1998.

Ershov, V. V., Ryabtsev, V. A., and Shalitin, V. A., “The Stability of Rotational Shells with Variable Thickness”, Review of Theory of Plates and Shells, Nauka, Moscow, 594-603, 1975. (in Russian)

Irie, T., Yamada, G., and Kaneko, Y., “Free Vibration of a Conical Shell with Variable Thickness”, Journal of Sound and Vibration, 82, 83-94, 1982.

Heyliger, P. R., and Julani, A., “The Free Vibrations of Inhomogeneous Elastic Cylinders and Spheres”, International Journal of Solids and Structures, 29, 22, 2689-2708, 1992.

Koiter, W. T., Elishakoff, I., Li, Y. W., and Starnes, J. H., “Buckling of an Axially Compressed Cylindrical Shell of Variable Thickness”, International Journal of Solids and Structures, 31, 6, 797-805, 1994.

Lomakin, V. A., “The Elasticity Theory of Nonhomogeneous Materials”, Nauka, Moscow, 1976. (in Russian)

Massalas, C., Dalamanagas, D., and Tzivanidis, G., “Dynamic Instability of Truncated Conical Shells with Variable Modulus of Elasticity under Periodic Compressive Forces”, Journal of Sound and Vibration, 79, 519-528, 1981.

Mineev, V. E., “A Study of Cylindrical Shell under Uniform External Dynamic Pressure”, Research on the Theory of Plates and Shells, Kazan State University, Kazan, 6-7, 596-623, 1970. (in Russian)

Sankaranarayanan, N., Chandrasekaran, K., and Ramaiyan, G., “Free Vibrations of Laminated Conical Shells of Variable Thickness”, Journal of Sound and Vibration, 123, 357-371, 1988.

Sachenkov, A. V., and Baktieva, L. U., “Approach to the Solution of Dynamic Stability Problems of Thin Shells”, Research on the Theory of Plates and Shells. Kazan State University, Kazan, 13, 137-152, 1978. (in Russian)

Sivadas, K. R., and Ganesan, N., “Vibration Analysis of Laminated Conical Shells with Variable Thickness”, Journal of Sound and Vibration, 148, 477-491, 1991.

Sofiyev, A., and Aksogan, O., “Dynamic Stability of a Nonhomogeneous Orthotropic Elastic Cylindrical Shell under a Time Dependent External Pressure”, Technical Journal of Chamber of Civil Engineers Turkish, 10, 4, 2011-2028, 1999.

Sofiyev, A., and Karaca, Z., “The Dynamic Stability of a Laminated Orthotropic Truncated Conical Shell under Time Dependent External Pressure”, Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences, 25, 3, 237-247, 2001.

Takahashi, S., Suzuki, K., and Kosawada, T., “Vibrations of Conical Shells with Varying Thickness (Continued)”, Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 28, 235, 117-123, 1985.

Tazyukov, F. Kh., “The Stability of Plates and Shells under Impulsive Loading”, Research on the Theory of Plates and Shells, Kazan State University, Kazan, 23, 119-130, 1991. (in Russian)

Tonin, R. F., and Bies, D. A., “Free Vibration of Circular Cylinders of Variable Thickness”, Journal of Sound and Vibration, 62, 2, 165-180, 1979.

Zhang, X., and Hasebe, N., "Elasticity Solution for a Radially Nonhomogeneous Hollow Circular Cylinder", ASME Journal of Applied Mechanics, 66, 598-

606, 1999.

Wolmir, A. S., "Nonlinear Dynamics of Plates and Shells", Nauka, Moscow, 1972. (in Russian).