

## İki Ucundan Basit Mesnetli Düz Bir Viyadük Yolun Eğilme Titreşimleri

**Ahmet ÇELİK**

*Yıldız Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü,  
Yıldız, İstanbul-TÜRKİYE*

**Kemal YÜKSEK**

*İstanbul Kültür Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü  
Bahçelievler, İstanbul-TÜRKİYE*

**İsmail YÜKSEK**

*Yıldız Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü,  
Yıldız, İstanbul-TÜRKİYE*

Geliş Tarihi 22.03.2001

### Özet

Yoğun trafiğe sahip büyük şehirlerde, şehir içi trafik yoğunluğunu azaltmak ve şehir içi yolları otoyollara bağlamak için, viyadük yollar geniş kullanıma sahiptir. Viyadük yollar deprem kuşağında olan bölgelerde, beton yerine çelik konstrüksiyondan yapılmaktadır. Deprem esnasında betondan yapılan yapılarda çatlama veya kırılmalar yoğun olarak görülmekte bu nedenle çelik yapılar tercih edilmektedir. Çelikten yapılan yapılar, beton yapılara göre daha hafiftir ve büyük genlikli hareketlere müsaade ederler. Bu ise titreşim ve gürültü problemi olarak karşımıza çıkar. Özellikle nüfusun yoğun olduğu bölgelerde, gürültü kaynaklı çevre kirliliğinin azaltılması için otoban yollardaki titreşim ve ses kontrolüne ihtiyaç vardır. Bu çalışmada alttan altı adet dikdörtgen kesitli, boylamasına kirişlerle desteklenmiş, kısa kenarı boyunca basit mesnetli, dikdörtgen plak şeklindeki bir viyadük'ün eğilme titreşimleri incelenmiştir. Doğal frekanslar Rayleigh-Ritz tekniği, sonlu elemanlar yöntemiyle ve deneysel olarak elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar tablolarda karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Eğilme titreşimi, Doğal frekans, Dikdörtgen plak, Rayleigh-Ritz Tekniği, Sonlu elemanlar yöntemi.

## Bending Vibration of Two Edges of a Simple Supported Flat Viaduct Road Part

### Abstract

Viaduct roads have wide application in big cities with high traffic loads in order to decrease the traffic density and to connect roads within cities to highways. Viaduct roads are constructed with steel structures instead of concrete ones in areas of earthquake risk. The low weight of steel structures causes problems such as vibration and noise. There is an increasing demand, especially in populated areas, to suppress vibration and noise in highways in order to reduce noise-related environmental pollution. In this study, bending vibrations of rectangular plate viaduct roads, which are supported by six fixed elements of rectangular cross section elements, are determined. Natural frequencies are obtained using the Rayleigh-Ritz technique, finite element analysis and experimentally. The results are presented in tables for comparison.

**Key Words:** Bending vibration, Natural frequency, Rectangular plate, Raleigh-Ritz technique, Finite element method.

## Giriş

Takviyeli plaklar uçak, gemi, demiryolu araçları, döşeme sistemleri ve köprü gibi yaygın uygulamalarda önemli bir yapı elemanlarıdır. Bu plaklarda, üzerinde geçen vasıtalar, deprem gibi nedenlerle titreşimler meydana gelmekte, bu titreşimlerin sistemin doğal frekansları ile çakışması halinde rezonans meydana gelmekte ve yer aldığı sistemin (köprü, bina, vs. gibi) yıkılmasına sebep olmaktadır. Bu nedenle doğal frekansların tespiti önemlidir.

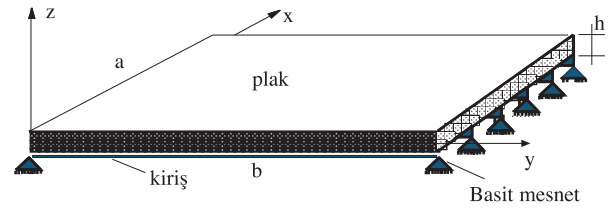
Kiriş ve plak gibi yapı elemanlarına ait dinamik davranışlar birçok araştırmacı tarafından incelendi. Bu sistemler üzerinde yapılan analizler, sistemlerin uygun matematiksel modellerle modellenmesi ile sistemin çözümüne ait uygun yaklaşım yöntemleri üzerinde oldu. İnce dikdörtgen plakların serbest enine titreşimlerini Leissa (1969) inceledi. Leissa (1973) kiriş ve plaklar için seri tipi fonksiyon yaklaşımları kullandı. Bassily ve Dickinson (1975) tarafından serbest kenarlara sahip plak problemlerinde Rayleigh-Ritz tekniği uygulandığında kullanılmak üzere bazı dejenere kiriş fonksiyonları önerildi. Bert ve Newberry (1986) sonlu eleman metodunda Rayleigh optimizasyon yöntemini uyguladı. Kim ve Dickinson (1987) çizgisel mesnetli plak sistemlerinin eğilme titreşimlerini Rayleigh-Ritz tekniği ile inceledi. Heyliger ve Reddy (1988) lineer ve lineer olmayan frekans analizinde sonlu elemanlar yöntemini kullandı. Sakata ve Hosokawa (1988) dikdörtgen ortotropik ankastre verev plakların doğal frekansları için çift trigonometrik seriler kullanarak gerçeğe daha yakın sonuçlar elde etti. Kim ve Arkadaşları(1990) dikdörtgen plakların enine titreşimlerini Rayleigh-Ritz tekniğinde basit polinomlar kullanarak inceledi.

Bazı araştırmacılar takviyeli plakların titreşim analizi üzerinde durdu. Takviye edilmiş plak Ney ve Kulkarni (1972) tarafından orthotropik plak gibi idealize edildi. Takviye edilmiş plak, Balendra ve Shanmugan (1985) tarafından birbirini kesen kirişlerden oluşmuş kafes bir yapıya dönüştürüldü. Takviyeli plak problemlerinin çözümü için, Bhat (1982), Rayleigh-Ritz yöntemini, Long (1971) matris yöntemini, Mukhopadhvay (1989) sonlu farklar yöntemini, Mukherjee ve Mukhopadhvay (1988) sonlu eleman yöntemini ve Srinivasan ve Munaswamy (1978) sonlu strip yöntemini önerdi.

Buradaki çalışmada, takviyeli dikdörtgen plağın titreşim analizinde kullanılan Rayleigh-Ritz yönteminde, yer değiştirme fonksiyonları için Szilard (1974) ' de verilen kiriş fonksiyonları kullanılmıştır.

## Matematik Formülasyon

Viyadük yollar genelde düz ve eğri plakların birleştirilmesinden oluşurlar. Şekil 1'de viyadük yol modelinin düz parçasının modeli verilmiştir. Model 1,8x0,9x0,006 m boyutunda bir plak ve onu alttan destekleyen 1,8x0,02x0,004 m boyutlarında 6 adet kirişten oluşmuştur Yüksek ve Arkadaşları(2000). Bu model Tokyo'da yoğun olarak kullanılan viyadük yolların yapısından yararlanılarak oluşturulmuştur. Deneysel çalışma ile ilgili bölümde gerçek bir viyadük yol modeli verilmiştir.



Şekil 1. Düz viyadük yol modeli

## Rayleigh-ritz tekniği

Basit mesnetli dikdörtgen plaklar ile bir tarafından ankastre diğer kenarlarından farklı bağlantı özelliklerine sahip dikdörtgen plaklar (Leissa,1969) için oluşturulan diferansiyel denklemin kesin çözümü bilinmektedir. Çeşitli sınır şartlarına sahip plakların çözümü için de nümerik yöntemlere başvurmak gerekir. Böyle problemler için Ritz tarafından geliştirilen yöntem (Young,1950) oldukça faydalı bulunmuştur. Plak ve kirişlerin birlikte ele alınmasıyla oluşturulan takviyeli plak için denklemlerinin yaklaşık çözümü Rayleigh-Ritz yöntemi ile elde edilebilir.

Bu çalışmada karşılıklı a kısa kenarı boyunca basit mesnetlenmiş, uzun kenarları boyunca serbest, b uzun kenarına paralel 6 adet dikdörtgen kesitli kirişle desteklenmiş dikdörtgen kesitli plak problemi incelenecektir. Alt kısmından b kenarına paralel, 6 adet prizmatik kirişle desteklenmiş, dikdörtgen bir plak için potansiyel enerji ifadesi,

$$V = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left[ E_k I_k \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x_k}^2 dy + G_k I_o \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x_k}^2 dy \right] \quad (1)$$

ve kinetik enerji ifadesi,

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left[ \rho_k A_k \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{x_k}^2 dy \right] \quad (2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Burada D; plak rijitliği,  $E_k I_k$ ; kiriş rijitliği,  $\rho_k$ ; kirişin yoğunluğu,  $A_k$ ; kirişin enine kesit alanıdır.

Takviyeli dikdörtgen plağın orta düzleminin küçük salınımlar için yer değiştirme ifadesi, titreşimlerin harmonik kabul edilmesi nedeniyle,

$$w = W(x, y) e^{i\omega_n t} \quad (3)$$

şeklinde alınabilir. Potansiyel ve kinetik enerji ifadelerinde  $w$  nın gerekli türevleri alınıp yerine yazılırsa, maksimum enerji ifadeleri için,

$$V_{\max} = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left[ E_k I_k \int_0^b \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{x_k}^2 dy + G_k I_o \int_0^b \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_{x_k}^2 dy \right] \quad (4)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho h \omega_n^2 \int_0^a \int_0^b W^2 dx dy + \frac{1}{2} \omega_n^2 \left[ \sum_{k=1}^6 \rho_k A_k \int_0^b (W)_{x_k}^2 dy \right] \quad (5)$$

elde edilir. Enerji ifadelerinde yer alan yer değiştirme fonksiyonu,

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \phi_m(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad n = 1, 2, 3, \dots, 8$$

olarak kabul edilmiş olup hesaplamalarda ilk sekiz terim dikkate alınmıştır. Burada,

$$m=1 \text{ için } \phi_1 = 1; \quad m=2 \text{ için } \phi_2 = 2 \left( \frac{x}{a} \right) - 1;$$

$$m>2 \text{ için } \phi_m(x) = \cosh(\lambda_m x/a) + \cos(\lambda_m x/a)$$

$$-\frac{\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m} [\sinh(\lambda_m x/a) + \sin(\lambda_m x/a)] \quad (7)$$

Burada,

$$\lambda_m = (2m - 3)\pi/2 \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (8)$$

Rayleigh-Ritz tekniğinde enerji ifadelerini kullanarak ve Rayleigh oranını bilinmeyen  $a_{mn}$  katsayılarına göre,

$$(\partial/\partial a_{mn}) (V_{\max} - T_{\max}) = 0 \quad (9)$$

şeklinde minimize ederek, temel öz değer ifadesi elde edilir. (9) denkleminin çözümü yapılırken aşağıdaki matris formuna göre yazıldı ve öz değer problemin doğal frekansları bulundu,

$$\sum [A_{mn} - \omega_n^2 B_{mn}] a_{mn} = 0 \quad (10)$$

### Deney Düzenegi

Gerçek bir viyadük yol modeli Şekil 2'de görülmektedir. Bu modele ait deney düzenegi ise

Şekil 3'te verilmiştir. Şekil 4'de, kullanılan sensör ve magnetik kuvvet oluşturucu görülmektedir.

Şekil 3'deki sisteme ait deney seti Şekil 5'de şematik olarak görülmektedir. Deney seti ile viyadük yol modelini ait düz kısmın modal analizi yapılmıştır. Bu analiz sayesinde doğal frekans değerleri, mod şekilleri ve sönüm etkilerini incelemek mümkün olmuştur.

Deney seti iki farklı şekilde oluşturuldu. Birinci durumda, Şekil 5'da görüldüğü gibi impuls çekici kullanıldı. İkinci durumda ise yolun altına yerleştirilen magnetik damper ile zorlayıcı kuvvet oluşturuldu Şekil 4. Sinyal jeneratörünün çıkışı

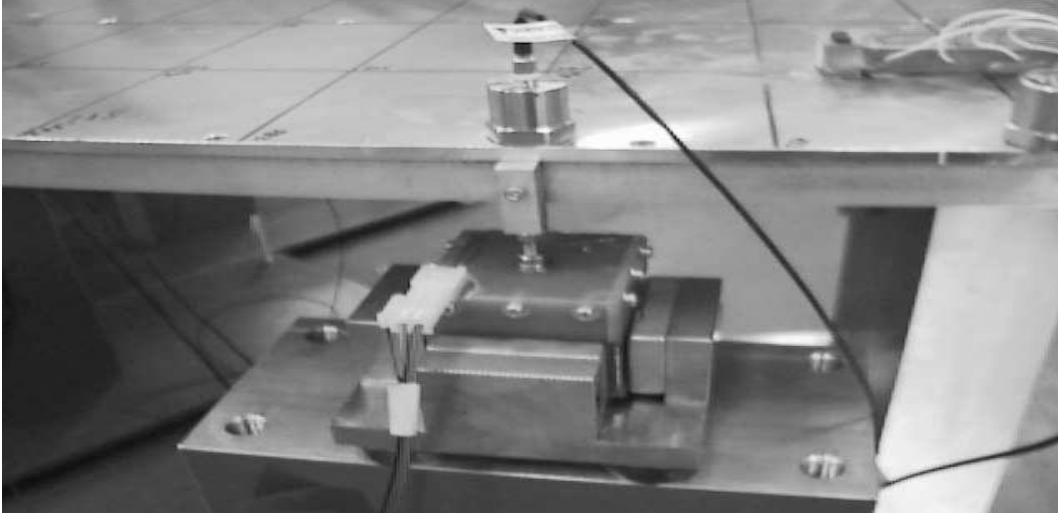
bir güç ayarlayıcısına (power amplifier) bağlandı. Her iki sistemde de yol üzerine bir adet titreşim algılayıcı(sensor) yerleştirildi. Algılayıcının çıkışı akım düzenleyici( charge amplifier) tarafından bir analog bilgisayara bağlandı. Analog bilgisayar çıkışı ise FFT (fast fourier transform) analizi yapabilen bir bilgisayara bağlandı. Her iki durumda FFT tarafından elde edilen frekans cevap eğrilerinden kritik frekanslar bulundu. Mod şekillerinin bulunmasında Synnoise paket programından yararlandı. Deney ve sonlu elemanlar paket programı ile bulunan mod şekilleri birbirlerinin aynısı olduğu gözlemlendi.



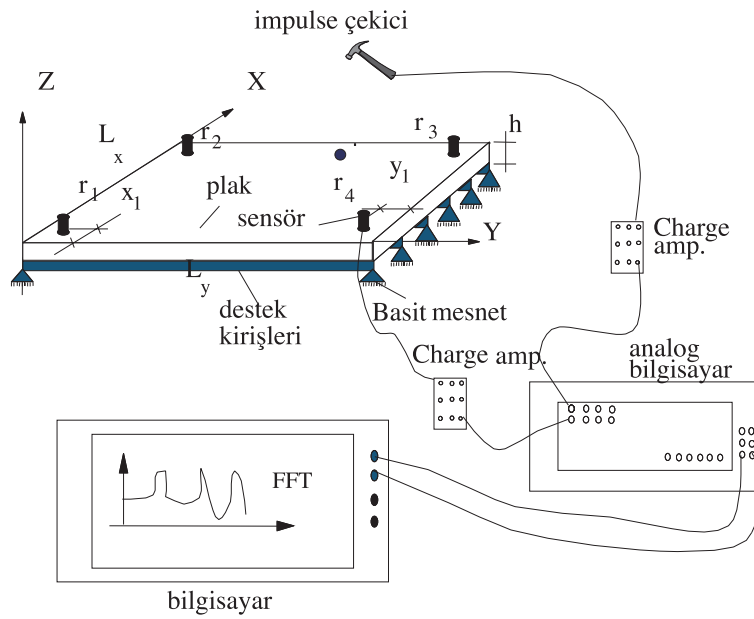
Şekil 2. Gerçek bir viyadük yol modeli



Şekil 3. Viyadük yol modeline ait deney düzeneği



Şekil 4. Magnetik kuvvet oluşturu ve algılayıcının görüntüsü



Şekil 5. Deney düzeneği

### Sonuçlar

Yukarıda verilen formüller kullanılarak yapılan simülasyonlar sonucunda sisteme ait doğal frekans değerleri Tablo 1' de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bu çalışmada 200 Hz. altındaki doğal frekans değerleri hesaplanmıştır. Şekil 6'da ise alttan çubuklarla desteklenmiş iki ucundan basit mesnetli viyadük yol modeline ait mod şekilleri gösterilmiştir.

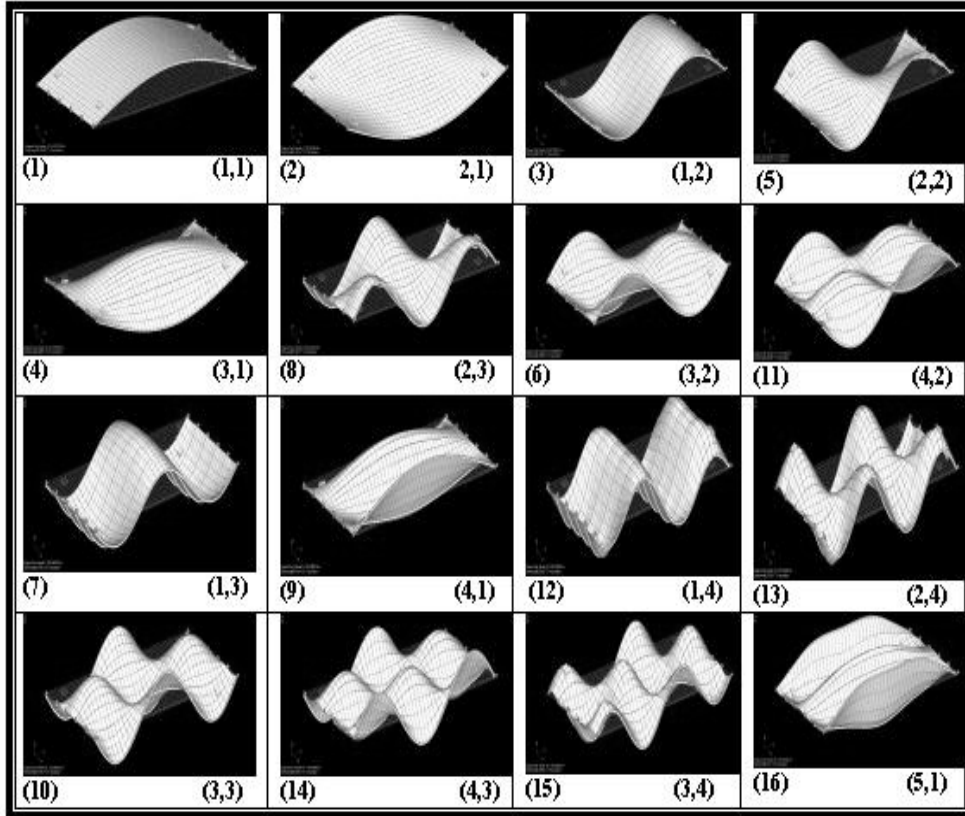
Deneyssel olarak elde edilen sonuçlar ile NASTRAN FEM analiz programı ile elde edilen sonuçlar

ayrı ayrı bu tabloda gösterilmiştir. Düşük frekanslarda, her üç yöntemle elde edilen kritik frekans değerlerinin birbirine çok yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. (1,1),(1,2),(2,1),(2,2) Titreşim frekanslarının değerleri üç yöntemde de hemen hemen aynı çıkmaktadır.

Yüksek titreşim frekanslarında, enerji yöntemiyle elde edilen sonuçların, diğer yöntemlerle elde edilen değerlere göre daha yüksek sonuçlar verdiği göze çarpmaktadır.

**Tablo 1.** Doğal frekans değerleri (Deney, Enerji metodu ve FEM )

Mod sayısı	Mode	Deney Hz.	Enerji Metodu Hz.	FEM Hz.
1	(1,1)	10,25	10,10	10,21
2	(2,1)	16,00	15,73	15,64
3	(1,2)	40,50	40,43	39,15
4	(3,1)	48,00	43,90	44,29
5	(2,2)	49,50	50,66	47,56
6	(3,2)	74,75	75,96	73,12
7	(1,3)	86,50	90,98	85,27
8	(2,3)	94,50	108,11	93,27
9	(4,1)	112,80	103,99	105,00
10	(3,3)	122,30	135,15	123,05
11	(4,2)	135,3	129,89	129,79
12	(1,4)	145,3	161,75	145,32
13	(2,4)	156,00	188,41	152,70
14	(4,3)	177,00	182,84	174,87
15	(3,4)	184,50	220,33	182,62
16	(5,1)	201,02	195,34	198,78



**Şekil 6.** Düz viyadük yola ait mod şekilleri

**Sembol Listesi**

$a$	plağın x eksenine paralel kenar uzunluğu	$I_0$	her bir kirişin polar atalet momenti.
$a_{mn}$	takviyeli plak için kabul edilen $W$ yer değiştirme fonksiyonundaki sabit katsayılar	$x_k$	plağın altındaki kirişlerin yerleştirildiği x noktası (Kirişin ağırlık merkezinden geçen dikey eksenin x eksenini üzerindeki yeri)
$A_k$	kirişin enine kesit alanı	$k$	kiriş sayısı
$b$	plağın y eksenine paralel kenar uzunluğu	$\lambda_m$	kiriş fonksiyonlarında yer alan $m$ ' ye bağlı bir katsayı
$b_1$	kiriş genişliği	$m, n$	takviyeli plağın mod sayıları
$D$	plağın eğilme rijitliği	$\nu$	plağın malzemesine ait Poisson sayısı
$E$	plağın elastiklik modülü	$\omega_n$	takviyeli plağın doğal frekansı
$E_k$	kirişlerin elastiklik modülü	$\rho$	plağın malzemesine ait yoğunluk
$\phi_m$	serbest - serbest sınır şartlarına sahip kirişe ait şekil fonksiyonu	$\rho_k$	kiriş malzemesine ait yoğunluk
$G_k$	kirişlerin kayma modülü	$t$	zaman
$h$	plağın yüksekliği	$T_{\max}$	takviyeli plağın maksimum kinetik enerjisi
$h_1$	kiriş yüksekliği	$V_{\max}$	takviyeli plağın maksimum potansiyel enerjisi
$I_k$	her bir kirişin plak düzlemine paralel eksene göre atalet momenti	$w$	takviyeli plağın titreşim esnasındaki yer değiştirme fonksiyonu
		$W$	takviyeli plak için kabul edilen yer değiştirme fonksiyonu

**Kaynaklar**

- Balendra, T., and Shanmugan, N. E., "Free Vibration of Plates Structures by Grillage Method", Journal of Sound and Vibration, 99, 333-350, 1982.
- Bassily, S. F., and Dickinson, S. M., "On the Use of Beam Functions for Problems of Plates Involving Free Edges", Journal of Applied Mechanics, 858 - 864, December, 1975.
- Bert, C.W., and Newberry, A.L., "Improved Finite Element Analysis of Beam Vibration", Journal of Sound and Vibration, 105, 179-183, 1986.
- Bhat, R. B., "Vibrations of Panels with Non-uniformly Spaced Stiffeners", Journal of Sound and Vibration, 84, 449-452, 1982.
- Heyliger, P.R., and Reddy, J.N., "A Higher Order Beam Finite Element for Bending and Vibration Problems", Journal of Sound and Vibration, 126, 309-326, 1988.
- Kim, C.S., and Dickinson, S.M., "The Flexural Vibration of Line Supported Rectangular Plate Systems", Journal of Sound and Vibration, 114 (1), 129-142, 1987.
- Kim, C.S., Young, P.G., and Dickinson, S.M., "On the Flexural Vibration of Rectangular Plates Approached by Using Simple Polynomials in the Rayleigh-Ritz method", Journal of Sound and Vibration, 143 (3), 379-394, 1990.
- Leissa, A.W., Vibration of Plates, NASA SP-160, 1969.
- Leissa, A.W., "The Free Vibration of Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration 31, 257-293, 1973.
- Long, B.R., "A Stiffness-Type Analysis of the Vibration of a Class of Stiffened Plates", Journal of Sound and Vibration, 16, 323-335, 1971.
- Mukherjee, A., and Mukhopadhyay, M., "Finite Element Free Vibration of Eccentrically Stiffened Plates", Computers & Structures, 30, 1303-1317, 1988.
- Mukhopadhyay, M., "Vibration and Stability Analysis of Stiffened Plates by Semi-Analytic Finite Difference Method, Part II: Consideration of Bending and Axial Displacement", Journal of Sound and Vibration, 130, 41-53, 1989.
- Ney, S.F., and Kulkarni, G.G., "On the Transverse Free Vibration of Beam-Slab Type Highway Bridges", Journal of Sound and Vibration, 21, 249-261, 1972.
- Sakata, T., and Hosokawa, K., "Vibrations of Clamped Orthotropic Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration, 125, 429-439, 1988.
- Srinivasan, R.S., and Munaswamy, K., "Dynamic Response Analysis of Stiffened Slab Bridges", Computers & Structures, 9, 559-566, 1978.
- Szilar, R., Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974.
- Rao, S.S., Mechanical Vibrations, (3rd ed.), Addison Wesley Publishing Company, New York, 1995.

Young, D., "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method", J. Appl. Meth., 17, 448-453, 1950.  
Yukse, I., Kikushima, Y., Sivrioglu, S., and

Tanaka, N., "Cluster Control of a Viaduct Road", Proceedings of JSME Annual Meeting 2000, Nagoya, Japan, 2000.