

## Hava Jetleri Girişimi Probleminin Düşük Reynolds Sayılarında Çözümü İçin Sayısal Bir Yöntem

Haydar EREN, Ömer Erkin PEREMEÇİ, Vedat TANYILDIZI  
Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Elazığ-TÜRKİYE

Geliş Tarihi: 04.11.1996

**Özet:** Muhtelif jetlerin girişimi problemi, mühendislik uygulamaları için ilginç bir araştırma konusu olmuştur. Bu çalışmada, birbirine dik olarak çıkan iki jetin girişimi sonucu oluşan iki boyutlu akım alanı incelenmektedir. Çalışmada, her iki jet çıkışında da aynı hız ve basınç dağılımı seçilmiştir. Sıkıştırılabilen bir akışkan için yazılan zamana bağlı boyutsuz hareket denklemlerinden Crank-Nicholson implicit metodu kullanılarak sonlu fark denklemleri elde edilmiş, Fortran 77 bilgisayar dilinde yazılan bir program ile  $Re=0.5$  ve  $25$  için denklemler çözülerek özellikle girişim bölgesindeki akım karakteri araştırılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde özellikle girişim bölgesinde akımın karıştığı ve negatif hızların büyüdüğü, iki jetin ara bölgesinde ise akımda dönmeler olduğu görülmektedir.

**Anahtar Sözcükler:** Hava jeti, jet girişimi, çarpan jet, duvar jeti, Crank-Nicholson metodu

### The Numerical Solution of Interacting Air Jets Problem for Low Reynolds Numbers

**Abstract:** The problem of interaction of jets is one of the interesting research subjects in the engineering applications. In this work, the two dimensional flow field resulting from the interaction of two jets perpendicular to each other is investigated numerically.

In the study, the exit velocity and pressure distributions for both of the jets are chosen as the same. The finite difference equations are obtained by applying the Crank-Nicholson implicit method to the non-dimensional equations of motion written for the unsteady flow of the compressible fluids; and the flow behaviors in the interaction region is investigated by solving those equations for  $Re=0.5$  and  $Re=25$  with a computer program coded in Fortran 77.

It is seen from the results that the flow is mixed and the negative velocities are magnified and the flow is rotational in the intersection region

**Key Words:** Air jets, jets interaction, impinging jets, wall jets, Crank-Nicholson method.

### Giriş

Literatürde son yıllarda sıkıştırılamaz akışkan kabulüyle tek jet için yapılan sayısal ve deneysel çalışmalar gittikçe artmakla beraber, birden fazla jetin girişimi ile ilgili sayısal çalışmalar oldukça azdır. Dairesel ve düzlemsel hava jetlerine, elektronik sistemlerin soğutulması ile bant türü mamullerin kurutulmasında sıkça rastlanmaktadır. Bu çalışmada çarpaz iki jetin girişimi, sıkışabilir akışkan kabulüyle ve zamana bağlı olarak incelenmektedir.

Uygulanan çözüm tekniğinde, sonlu fark denklemleri belirli bir  $t$  anında eliptik denklem gibi işleme tabi tutulmakta ve ancak  $t$  zamanından  $t + \Delta t$  zamanına geçişte zamana bağımlılığa izin verilmektedir. Bu düşünce ile denklemlerle birlikte verilen bütün sınır şartları, zamandan bağımsız alınmıştır. Bir başka deyişle bu çalışmada zaman değişkeni, ( $t=st$ ,  $x$ ,  $y$ ) düzlemleri arasında bir skala çarpanı gibi düşünülmektedir.

Kullanılan çözüm metodunun güvenilirliğini sınamak için, öncelikle tek jet için çözüm yapılmış ve bulunan

sonuçların, iyi bilinen benzerlik çözümleri ve bazı araştırmacıların yapmış olduğu deneysel sonuçlarla iyi uyuşması üzerine, bu yöntemin birden fazla jetin girişimi probleminde de kullanılabileceği kanaatine varılmıştır (EREN, 1995).

Denklemlerin çözümünde Crank-Nicholson implisit sonlu fark metodu kullanılmıştır. Üniform kartezyen ağı sisteminde yazılan denklemler, iteratif olarak çözülmüştür. Literatürde benzeri bir çalışmaya rastlanmadığından sadece tek jet için sonuçların mukayesesi yapılabilmektedir.

### Formülasyon

Sıkışabilir Newtonian akışkanın kararsız, laminar ve izotermik düzlemsel akımı için boyutsuz süreklilik, momentum ve hal denklemleri aşağıda verilmiştir. x-momentum denklemi :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \quad (1)$$

y-momentum denklemi :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} \quad (2)$$

Süreklilik denklemi :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Hal denklemi,

$$p \cdot \rho^k = \text{sabit} \quad (4)$$

Bu denklemlerde; boyutlu hızlar maksimum jet çıkış hızı ( $U_m$ ), zaman ( $L/U_m$ ), basınç ( $\rho_\infty U_m^2$ ) kullanılarak boyutsuz hale getirilmiştir. Bu durumda  $\rho_\infty$ , ortamdaki akışkanın yoğunluğunu; L, kanal genişliğini göstermek üzere  $\text{Re} = \rho_\infty U_m L / \mu$  alınacaktır.

t zamanından t+Δt zamanına geçişten dolayı, incelenen denklemlerin parabolik tipte oldukları görülmektedir. Fakat bu denklemler, çözümün elde edildiği belirli bir t zamanında (t=sabit, x,y) eliptik olarak kabul edilebilirler. Ancak, bir adımdan diğer bir adıma geçişte zamana bağımlılığa izin verilmektedir.

### Sonlu Fark Denklemleri

Sonlu Fark Denklemleri, mesala y-momentum denklemi aşağıdaki şekli almaktadır:

$$\begin{aligned} & \rho_{i,j}^n \left\{ \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{1}{4\Delta x} (v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n) \right. \\ & + v_{i,j}^n \frac{1}{4\Delta y} (v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n + v_{i+1,j-1}^n - v_{i-1,j-1}^n) \left. \right\} = -\frac{1}{4\Delta y} (p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n + p_{i+1,j-1}^n - p_{i-1,j-1}^n) \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{1}{2\Delta x^2} (v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n - 2v_{i,j+1}^n + v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n - 2v_{i,j-1}^n) \right. \\ & + \frac{2}{3\Delta y^2} (v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i+1,j-1}^n + v_{i-1,j-1}^n - 2v_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{1}{6\Delta x \Delta y} (u_{i+1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n + u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) \\ & \left. + u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n \right\} \end{aligned}$$

Kararlılık ve yakınsama avantajlarından dolayı sonlu fark denklemlerinin yazılmasında Crank-Nicholson implicit metodu kullanılmıştır (Smith, 1969).

Bu denklemden  $v_{i,j}$  çekilirse,

$$\begin{aligned} (v_{i,j}^n) = & \frac{1}{A2} [B2(v_{i,j+1}^n + v_{i,j-1}^n) + C2(v_{i,j-1}^n + v_{i,j+1}^n) + D2(v_{i+1,j}^n + v_{i-1,j}^n) \\ & + E2(v_{i-1,j}^n + v_{i+1,j}^n) + F2v_{i,j}^{n-1} + G2 \end{aligned} \quad (5)$$

bulunur. Bu eşitlikte;

$$\text{ER} = 1/\text{Re}$$

$$\text{TDX} = 1/\Delta x$$

$$\text{TDY} = 1/\Delta y$$

$$\text{TDX2} = 1/\Delta x^2$$

$$\text{TDY2} = 1/\Delta y^2$$

$$\text{TDT} = 1/\Delta t$$

$$\text{TDXDY} = 1/(\Delta x \Delta y)$$

$$\begin{aligned} A2 = & \text{TDT} \rho_{i,j}^n + 0.25 \text{TDY} \rho_{i,j}^n (v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n + v_{i+1,j-1}^n - v_{i-1,j-1}^n) \\ & + \text{ER} (\text{TDX2} + \frac{4}{3} \text{TDY2}) \end{aligned}$$

$$B2 = \text{ER} 0.5 \text{TDX2} - 0.25 \text{TDX} \rho_{i,j}^n u_{i,j}^n$$

$$C2 = \text{ER} 0.5 \text{TDX2} + 0.25 \text{TDX} \rho_{i,j}^n u_{i,j}^n$$

$$D2 = \text{ER} (2/3) \text{TDY2}$$

$$E2 = \text{ER} (2/3) \text{TDY2}$$

$$F2 = \text{TDT} \rho_{i,j}^n - \text{ER} \text{TDX2} - \text{ER} (1/3) \text{TDY2}$$

$$\begin{aligned} G2 = & \text{ER} (1/6) \text{TDXDY} (u_{i+1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n + u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) \\ & + u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n - 0.25 \text{TDY} (p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n + p_{i+1,j-1}^n - p_{i-1,j-1}^n) \end{aligned}$$

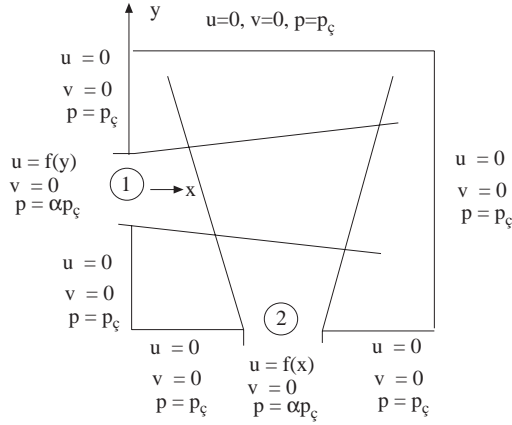
şeklinde tanımlanmıştır. u-hızı x-momentum denkleminde, yoğunluk süreklilik denkleminde ve basınç hal denkleminde çekilmek suretiyle diğer denklemler de benzer şekilde yazılabilir.

### Sınır Şartları ve Çözüm Metodu

Bir serbest jet problemi, tabiatı gereği sonsuz bölgelerde çalışmayı gerektirir. Ancak bu tür bir problemin bilgisayarda çözümü, sonlu bir bölge içerisine sığdırılmalıdır. Dolayısıyla probleme gelişigüzel sınırlar yüklemek gerekir. Sağlıklı sonuç elde etmek için bu sınırlar, incelenen bölgenin olabildiğince uzağına yerleştirilmelidir. Fakat geniş bir hesaplama bölgesinde çalışmak, bilgisayar belleğinin ve programın çalışma süresinin artması anlamına gelir. Çözümlemede bu sınırlar, olabildiğince az bellek kullanarak en kısa sürede çözüm elde edecek şekilde seçilmişlerdir.

x ve y yönlerine göre, jet çıkış hızına bağlı olarak yeterli bir mesafede u-hız bileşeninin olmadığı kabul edilmelidir. Benzer şartlar Şekil 1'de gösterildiği gibi v-hız bileşeni ve p basıncı için de geçerlidir.

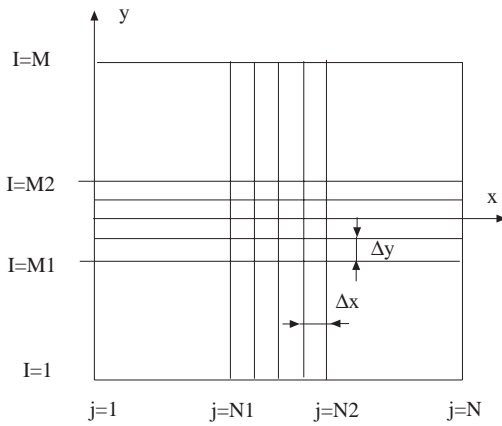
Her iki jet çıkışında da aynı parabolik hız dağılımı seçilmiştir:  $u=4(1/4-y^2)$ ,  $(-1/2 \leq y \leq 1/2)$  Tam gelişmiş laminar bir hız dağılımı kabulü ile birinci jet için  $v=0$ , ikinci jet için ise  $u=0$  alınmış ve jet çıkış basıncı çevre basıncının  $\alpha$  katı seçilmiştir. Jet giriş simetri şartlarının geometrik yerleşiminde kolaylık olsun diye jet bölgesi çift sayıda (JBS) parçaya bölünmüştür. Bu bölüntü sayısı  $\Delta y$ 'yi vermektedir:  $\Delta y=1/JBS$ .  $x$  yönündeki grid aralığı ise  $\Delta y$ 'ye eşit seçilmiştir. Kontrol hacmi, sınır şartlarına uygun bir çözüm elde edebilmek için, cidarlarında  $\partial u/\partial y = \partial u/\partial x = 0$  şartını sağlayacak şekilde büyük seçilmiştir.



Şekil 1. Sınır şartları.

### Grid Sistemi

Formülasyon kısmında, hareket denklemlerinden Crank-Nicholson implicit metodu kullanılarak sonlu fark denklemleri elde edilmiş ve söz konusu bu denklemler, Fortran 77 bilgisayar dilinde hazırlanan bir program yardımıyla iteratif olarak çözülmüştür. Bütün sayısal hesaplamalar  $Re=0.5$  ve  $25$  için yapılmış ve sonuçlar grafikler halinde sunulmuştur.



Şekil 2. Grid sistemi

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, jetlerin etkileşiminin sağlanması için jetler arası uzaklığın uygun seçilmesidir. Jetler arası mesafe dolayısıyla çözüm aralığı çok büyük seçildiğinde iki jetin birbirine etkisi az olacak, çok küçük seçildiğinde ise problemde geri yansıyan sınır şartlarının oluşması sebebiyle sonuçların doğruluğu tartışmalı olabilecektir. Çalışmada kullanılan grid sistemi yine  $Re$  sayısına bağlı olarak  $(31 \times 31)$  ya da  $(61 \times 61)$  seçilmiştir.  $(31 \times 31)$ 'lik grid sisteminde  $M1=N1=13$ ,  $M2=N2=19$ ;  $(61 \times 61)$ 'lik grid sisteminde ise  $M1=N1=25$ ,  $M2=N2=37$  alınmıştır.

### Akış Hesapları

Bu çalışmada, çapraz iki jetin girişimi problemi,  $Re=0.5$  ve  $Re=25$  için çözülmüştür. Kullanılan sayısal metodun doğruluğunu sınamak amacıyla, öncelikle  $Re=30$  için düzlemsel serbest jet problemi çözülmüş ve Schlichting (1933) ve Bickley (1939) in analitik sınırtabaka çözümü ile jet Reynolds sayısının 30'a kadar olan değerleri için Abramovich (1963) tarafından verilen deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmanın yapılabilmesi için, mutlak hız yerine yerel hızın jet eksenindeki hıza oranı ( $u/u_m$ ) ve jet ekseninden uzaklık ( $y$ ) yerine ise, bu mesafenin jet eksenindeki hızın yarı değerine ulaştığı nokta ile eksen arasındaki mesafeye oranı ( $y/b$ ) ele alınarak  $u/u_m$  ile  $y/b$  arasındaki eğri çizildi (Şekil 3).

Serbest jetin tüm kesitlerinde hız profilleri benzerdir. Yani, jetin herhangi iki kesitinde jet eksenine aynı uzaklıktaki noktalarda boyutsuz hızlar ( $u/u_m$ ) aynıdır.

Jette bu karşılıklı noktalar için boyutsuz hızların eşitliğinden ( $y_1/b_1 = y_2/b_2$ ) ve ( $u_1/u_{1m} = u_2/u_{2m}$ ) yazılabilir. Dolayısıyla Şekil 3'de görüldüğü şekliyle, jetin her bir kesitindeki mutlak hızlar yerine boyutsuz tek bir hız dağılımı seçmek yeterlidir. Şekil 3 incelendiğinde bu çalışmada bulunan sayısal sonuçların teoriye kıyasla deneysel sonuçlarla daha uyumlu olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak bu çalışmada kullanılan sayısal metodun doğru olduğuna karar verildi ve birden fazla jetin girişimi probleminde de geçerli olacağı kabul edildi. Çapraz jetlerin girişimi durumu için literatürle kıyas imkanı bulunamamıştır. Ancak sonucun grid düzeninden bağımsız olduğu gösterilebilir:  $Re=0.5$  ve  $T=5$  s için  $(31 \times 31)$ 'lik grid sisteminde 1 ve 2 noktalarında elde edilen sonuçlarla aynı çözüm ağı aralığında  $(16 \times 16)$ ,  $(61 \times 61)$  ve  $(121 \times 121)$  lik grid sisteminde elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır ve Şekil 4 üzerinde gösterilmiştir.

### Sonuç

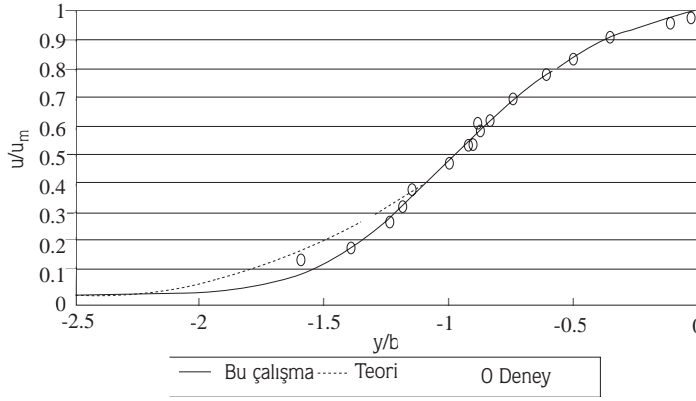
Şekil 5,8'de  $u$  hızının  $y$  doğrultusundaki değişimi incelendiğinde ilk birkaç kesitte girişimin etkisi az olmakta, girişim bölgesinde ise ikinci jetin etkisiyle iki jetin ara bölgesinde akımda dönmeler ve negatif hızlarda büyüme görülmektedir (Şekil 6,9). Reynolds sayısı arttıkça girişimin etkisi artmakta ve girişim bölgesinde akımda karışmalar meydana gelmektedir (Şekil 9).

Birinci jet için merkez hattı hızı incelendiğinde, gittikçe azalan bir hız dağılımı elde edilmektedir.  $Re=0.5$  için yapılan çalışmada 5. Saniyede merkez hattı hızının 31. grid noktasında sıfıra düştüğü görülmektedir (Şekil 7).  $Re=25$  durumunda 25. saniyede 30. grid noktasına kadar

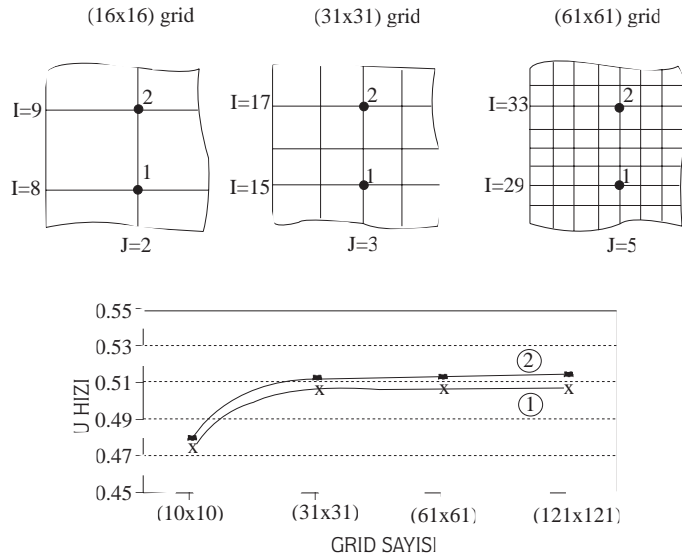
0.05'e düştükten sonra ikinci jetin etkisiyle bir miktar artmakta ve 58. grid noktasından sonra sıfıra düşmektedir (Şekil 10).

Şekil 11 ve 12'de sırasıyla  $Re=0.5$  ve  $Re=25$  için hız vektörü doğrultuları ve yönleri görülmektedir.

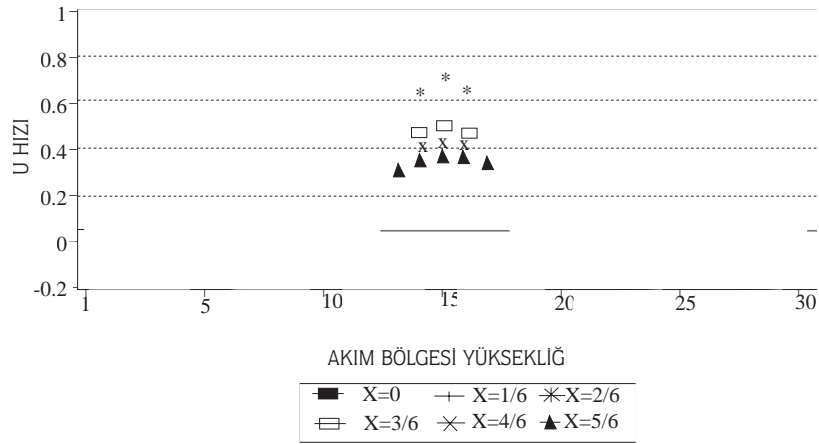
Serbest jetin tabiatı gereği, Reynolds sayısı arttıkça hesaplama bölgesinin boyutlarını da büyütmek gerekmektedir. Bu ise, grid sayısını artırmak veya gridler arası mesafeyi artırmakla mümkün olur. Şekil 4'te görülebileceği gibi gridler arası mesafenin aşırı büyütülmesi, sonuçların doğruluğunu tartışmalı hale getirebilir. Grid sayısını artırmak ise hem bilgisayar kapasitesinin hem de programın çalışma süresinin artması



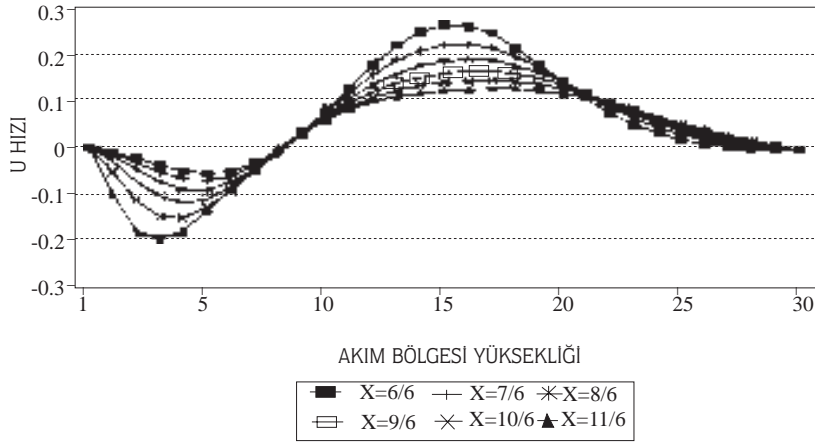
Şekil 3. Tek jet için boyutsuz hız dağılımının teorik ve deneysel sonuçlarla kıyaslanması ( $Re=30$ )



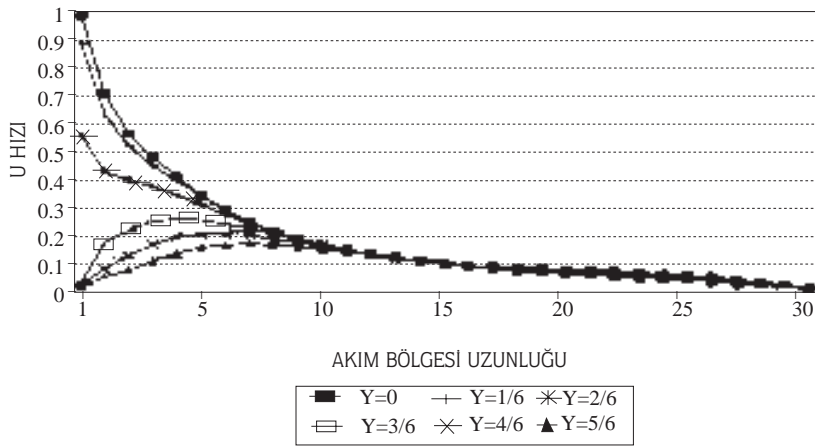
Şekil 4. Grid düzenleri ve sonuçlara etkisi



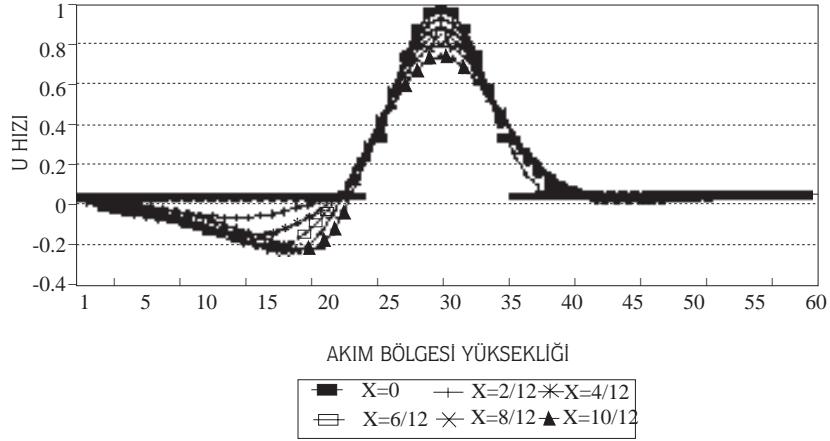
Şekil 5. u hızının y doğrultusundaki değişimi (Re=0.5, T=5s) [ $\Delta x=1/6$ ,  $\Delta y=1/6$ , (31x31) grid, JBS=6]



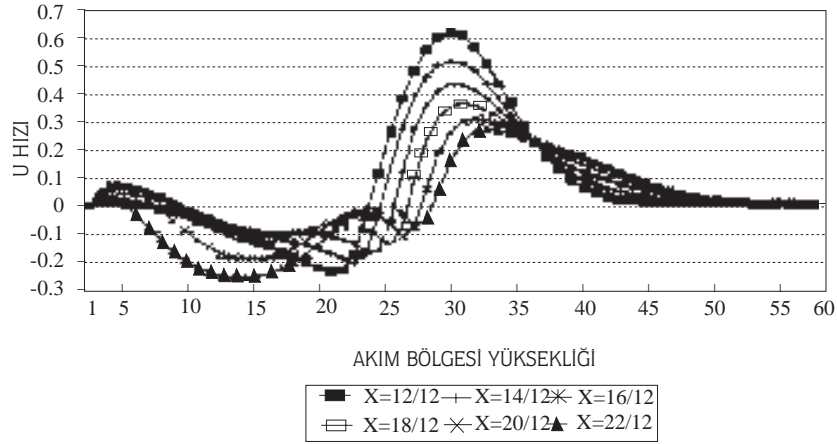
Şekil 6. u hızının y doğrultusundaki değişimi (Re=0.5, T=5s) [ $\Delta x=1/6$ ,  $\Delta y=1/6$ , (31x31) grid, JBS=6]\*\*



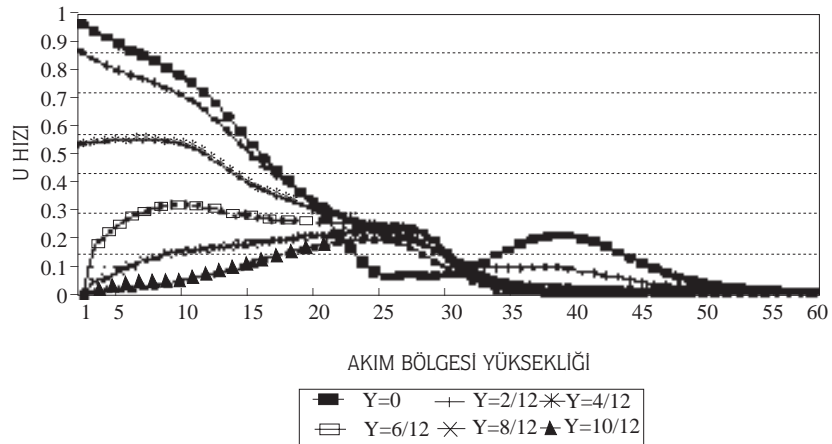
Şekil 7. u hızının x doğrultusundaki değişimi (Re=0.5, T=5s) [ $\Delta x=1/6$ ,  $\Delta y=1/6$ , (31x31) grid, JBS=6]



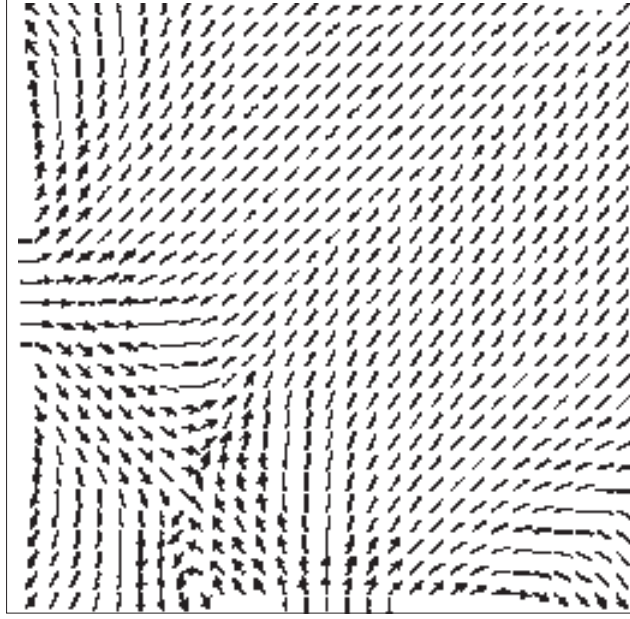
Şekil 8. u hızının x doğrultusundaki değişimi (Re=0.5, T=5s) [ $\Delta x=1/6$ ,  $\Delta y=1/6$ , (31x31) grid, JBS=6]



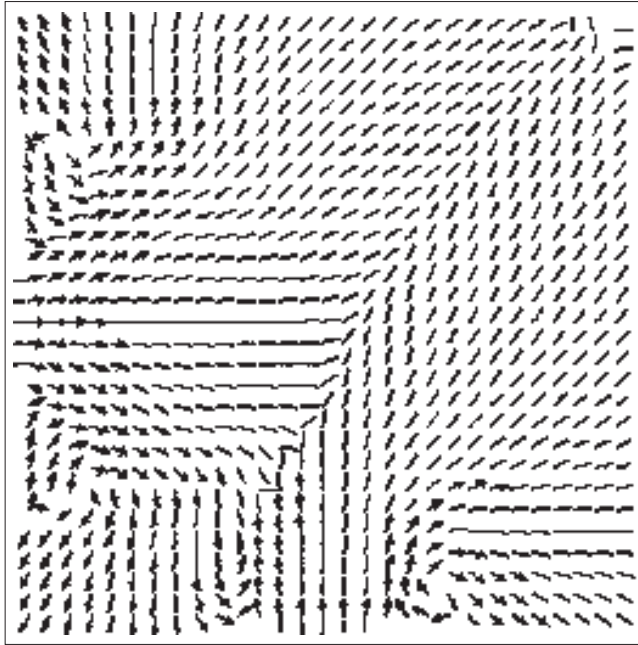
Şekil 9. u hızının y doğrultusundaki değişimi (Re=25, T=25s) [ $\Delta x=1/12$ ,  $\Delta y=1/12$ , (61x61) grid, JBS=12]\*\*



Şekil 10. u hızının x doğrultusundaki değişimi (Re=25, T=25 s) [ $\Delta x=1/12$ ,  $\Delta y=1/12$ , (61x61) grid, JBS=12]



Şekil 11. Hız vektörü doğrultu ve yönleri ( $Re=0.5$ ,  $T=5$  s)



Şekil 12. Hız vektörü doğrultu ve yönleri ( $Re=25$ ,  $T=25$  s)

anlamına gelir. Örneğin bir 486 DX-2 66 bilgisayarda tek jet için yapılan çalışmada ( $Re=30$ ),  $151 \times 151$  grid sayısında 25 saniyelik zaman dilimine ulaşmak için programın çalışma süresi yaklaşık olarak 125 dakika iken aynı şartlarda  $211 \times 211$  grid sayısında bu süre yaklaşık olarak iki katına çıkmaktadır. Aynı şekilde sonuçların sabit diskte kapladığı yer de iki kat artacaktır. Bütün bu kısıtlamalar sebebiyle Reynolds sayısını daha fazla artırmak mümkün olmamıştır.

### Semboller

b	: Yarı hız genişliği	-
JBS	: Jet bölgesi bölüntü sayısı	-
L	: Kanal genişliği	(m)
p	: Boyutsuz akışkan basıncı	-
Re	: Akışkanın Reynolds sayısı	-
t	: Boyutsuz zaman	-
u	: x yönündeki boyutsuz hız bileşeni	-
$u_m$	: Jet eksenini üzerindeki boyutsuz hız	-

### Kaynaklar

- Abramovich, G.N., "The Theory of Turbulent Jets", M.I.T Press, Cambridge, 1963.
- Akaike, S. and Nemoto, M., "Potential Core of a Submerged Laminar Jet", J. Fluid Eng. 110, 392-398, 1988.
- Blevins, R.D., "Applied Fluid Dynamics Handbook", Krieger Publishing Company, Florida, 1992.
- Courant, R. and Hilbert, D., "Methods of Mathematical Physics", Interscience Publishers, New York, 1953.
- Crow, S.C. and Champagne, F.H., "Orderly Structure in Jet Turbulence", J. Fluid Mech., 48(3), 547-591, 1971.
- Eren, H., "Aerodinamik Girişim Problemlerinin İncelenmesi, Jet Girişimi", Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, 1995.
- Eren, H. ve Peremeci, Ö.E., "Küçük Reynolds Sayılarında Çarpışan Ortak Eksenli Zıt Jet Probleminin Sayısal Çözümü", Birinci Uluslararası Havacılık ve İleri Teknolojiler Sempozyumu, İstanbul, 111-120, 1995.

$U_m$	: Maksimum jet çıkış hızı	(m/s)
x,y	: Kartezyen geometride boyutsuz koordinatlar	-
$\mu$	: Akışkanın dinamik viskozitesi	(N.m <sup>2</sup> /s)
v	: Akışkanın kinematik viskozitesi	(m <sup>2</sup> /s)
$\rho$	: Boyutsuz akışkan yoğunluğu	-
$\rho_\infty$	: Ortamdaki akışkanın yoğunluğu	(kg/m <sup>3</sup> )
$\alpha$	: Jet çıkışındaki basınç katsayısı	-
$\epsilon$	: Yakınsama kriteri	-
$\Delta x$	: x yönünde gridler arası mesafe (boyutsuz)	-
$\Delta y$	: y yönünde gridler arası mesafe (boyutsuz)	-
$\Delta t$	: Zaman adımı (boyutsuz)	-
**	: Girişim bölgesi şartları	-

Everitt, K.W. and Robins, A.G., "The Development and Structure of Turbulent Plane Jets", J. Fluid Mech., 88(3) 563-583, 1978.

Kyle, D.M. and Sreenivasan, K.R., "The Instability and Breakdown of A Round Variable-Density Jet", J. Fluid Mech., 249, 619-664, 1993.

Looney, M.K. and Walsh, J.J., "Mean-Flow and Characteristics of Free and Impinging Jet Flows", J. Fluid Mech., 147, 397-429, 1984.

Patankar, S.V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Mc Graw Hill New York, 1980.

Sato, H. and Sakao, F., "An Investigation of The Instability of A Two-Dimensional Jet at Low Reynolds Numbers", J. Fluid Mech., 20(2), 337-352, 1964.

Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", 7th Ed., Mc Graw-Hill, New York, 1979.

Smith, G.D., "Numerical Solution of Partial Differential Equations", London Oxford University Press, 1969.