

Kurak ve Yağışlı Gün Oluşumlarının Markov Zinciri Yaklaşımı ile Uygulamalı İncelenmesi

Kasım KOÇAK, Zekai ŞEN

*İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi
Meteoroloji Mühendisliği Bölümü, 80626 Maslak, İstanbul-TÜRKİYE*

Geliş Tarihi 07.07.1997

Özet

Markov zinciri, stokastik süreçlere uygulanan bir olasılık modeli olup meteoroloji, hidroloji vb. bilim dallarında ısrarlılığın (persistans) incelemesinde, başlangıç ve geçiş olasılıkları ile verilen bir periyot için kurak veya yağışlı dönemlerin olasılıklarının hesaplanmasında kullanılır. Bu olasılıklar, inşaat (özellikle su mühendisliği), tarım, endüstri, turizm, spor vb. alanlarda kullanılabilecek önemli bilgiler taşımaktadır. Bu çalışmada Markov zinciri yaklaşımı, Göztepe meteoroloji istasyonu'nda ölçülmüş olan 30 yıllık günlük toplam yağış verilerine uygulanmıştır. Bunun sonucunda Göztepe yağış verilerinin 1. mertebeden Markov zinciri yaklaşımı ile modellenebileceği ortaya konmuştur.

Anahtar Sözcükler: Markov zinciri, başlangıç olasılığı, geçiş olasılığı, kurak ve yağışlı periyot

Applied Examination of Dry and Wet Day Occurrences Via Markov Chain Approach

Abstract

The Markov chain is a probabilistic model used with stochastic processes in many branches of science such as meteorology and hydrology. This model is utilized to evaluate persistence and allows the use of combinatorial probability estimates including initial and transitional probabilities. These probabilities contain useful information that can be used in such activities as agriculture, construction (especially in water engineering), industry, tourism, and outdoor community activities such as fairs and athletic events. In this paper, the Markov chain approach was applied to 30 years of daily precipitation data recorded at Göztepe meteorology station. It was found that this data can be modelled successfully by a first-order Markov chain.

Key Words: Markov chain, initial probability, transitional probability, dry and wet period

Giriş

Yağış, atmosferdeki nemin, katı veya sıvı fazda yeryüzüne dönmesidir. Yeryüzündeki tatlı suyun ana kaynağı olan yağışın dağılımı, zamana ve yere bağlı olarak büyük değişim gösterir. Aynı değişim yağışın şiddeti ve miktarı için de geçerlidir. Oldukça karmaşık fiziksel süreçlerin ürünü olan yağış, hidrolojik çevrimin ve bir bölgenin ikliminin en önemli bileşenlerinden biridir. Yağış ya da be-

lirli dönemlerde yaşanan kuraklık genel olarak canlı yaşamını, özellikle de insanlığın pek çok etkinliklerini doğrudan etkiler.

Verilen bir bölgeye gelecekte ne kadar bir yağışın düşeceğini öngörmek, konuyla ilgili bilim adamlarının temel hedefi olmasına rağmen, bu öngörü en zor meteorolojik problemlerden biridir. Yağışın diğer meteorolojik parametrelerle ilişkisi

araştırılarak, bu parametrelere olan bağımlılığı ve bunun sonucu olarak dolaylı tahmini yapılabileceği gibi, yağış verilerini bir dizi olarak ele alıp çeşitli istatistiksel modeller uygulayarak da bazı sonuçlara varmak mümkündür. Bu çalışmalar arasında kurak ve yağışlı peryotların incelenmesi özellikle önemlidir. Bu bakımdan Weiss (1964) ve Feyerherm ve arkadaşlarınca (1964, 1965) yapılan çalışmalar önemli bir yere sahiptir. Ayrıca Şen (1976, 1978, 1990) tarafından otokorelasyona alternatif bir yöntem olarak geliştirilen autorun analizi, kurak ve yağışlı devre uzunluklarının ısrarlılığının incelenmesine pratik bir çözüm getirmektedir. Diğer bir yaklaşım ise Delleur ve arkadaşlarınca (1989) önerilen ve Markov zincirini özel bir hal olarak içeren ayrık otoregresiv kayan ortalama (DARMA) modelidir.

Bu çalışmada Markov zinciri yaklaşımı, Göztepe meteoroloji istasyonu'nda ölçülmüş olan 30 yıllık günlük toplam yağış verilerine uygulanmıştır. Bunun sonucunda Göztepe yağış verilerine 2. mertebeden Markov zinciri uygulanarak elde edilen olasılıkların, 1. mertebeden Markov yaklaşımı ile hesaplanan olasılıklara oldukça yakın sonuçlar vermesi üzerine, geçiş olasılıkları 1. mertebe üzerinden hesaplanarak çizelgeler halinde verilmiştir. Bu çizelgelerin önemi ve uygulamada nasıl kullanılacakları anlatılmıştır. Ayrıca çalışmanın sonlarında, günlük olasılıklardan

$$P(X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+n}) = P(X_t)P(X_{t+1}|X_t) \dots P(X_{t+n}|X_{t+n-1}) \quad (1)$$

Bu eşitlikte X değişkeni, bir eşik değerle tanımlanan karşıt durumları (kurak-yağışlı, sıcak-soğuk vb.) temsil etmektedir. Ayrıca $P(X_t)$ koşulsuz olasılığı "başlangıç olasılığı", $P(X_{t+1}|X_t)$ koşullu olasılığı ise "geçiş olasılığı" göstermektedir. Diğer

$$P(X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+n}) = P(X_t)P(X_{t+1}|X_t)P(X_{t+2}|X_{t+1}, X_t) \dots P(X_{t+n}|X_{t+n-1}, X_{t+n-2}) \quad (2)$$

şeklini alır. Bu durumda X değişkeninin bağımlılığı iki gün öncesine gider. Benzer şekilde 3. mertebeden Markov zincirinde bağımlılık üç gün öncesine kadar gidecektir. Feyerherm ve Bark (1964), veri sayısı ve yüksek mertebeden Markov zinciri için hesaplamaların güçleşeceğini, bunun için hızlı bilgisayarlar

haftalık olasılıklara geçiş konusunda Feyerherm ve arkadaşlarınca yapılan çalışmaların eleştirisine yer verilmiştir.

Kurak ve Yağışlı Günler

Bir yağış serisine ait kurak ve yağışlı peryotların bilinmesi, su yapılarının planlamasında ve işletilmesinde önemli rol oynar. Bir planlamacı yağışlı ve kurak sürelerin ortalama peryodunu, kurak bir dönemin maksimum uzunluğunu ve yağışlı bir peryot süresince meydana gelecek su miktarını bilmeyi, en azından güvenilir bir şekilde tahmin etmeyi ister. Bu niceliklerin her biri su mühendisliğinde önemli bir yer tutar, (Şen, 1976, 1978).

Genel olarak gidiş (run), bir gözlem seti içinde belirlenen bir değer (ortalama, medyan vb.) üstünde ya da altında seyreden ardışık gözlem gruplarıdır. Örneğin X_i gözlem setini ve X_0 eşik değeri sabit bir sayıyı göstermek üzere Şekil 1'de görüldüğü gibi bu sabit seviyeye göre iki ayrı veri grubu oluşacaktır. Bunlardan $X_i - X_0 > 0$ (pozitif gidiş) yağışlı dönemi, $X_i - X_0 < 0$ (negatif gidiş) ise kurak dönemi gösterir.

Markov Zinciri Modeli

Genel olarak 1. mertebeden Markov zinciri aşağıdaki eşitlikle verilir:

tarafından 1. mertebeden Markov zincirinde, herhangi bir değişkenin bağımlılığı ya da ısrarlılığı günlük veri lerde sadece bir gün öncesine ele alınır. Eğer 2. mertebeden Markov zincirini ele alırsak (1) eşitliği:

gereksinim olduğunu ifade etmişlerdir. Markov zincirinin mertebesi arttıkça, olasılıkları hesaplamak için gereken veri sayısı azalacaktır. Örneğin, 'K' kurak bir günü göstermek üzere ($X = K$) izleyen eşitlikleri dikkate alalım (Feyerherm ve Bark, 1964):

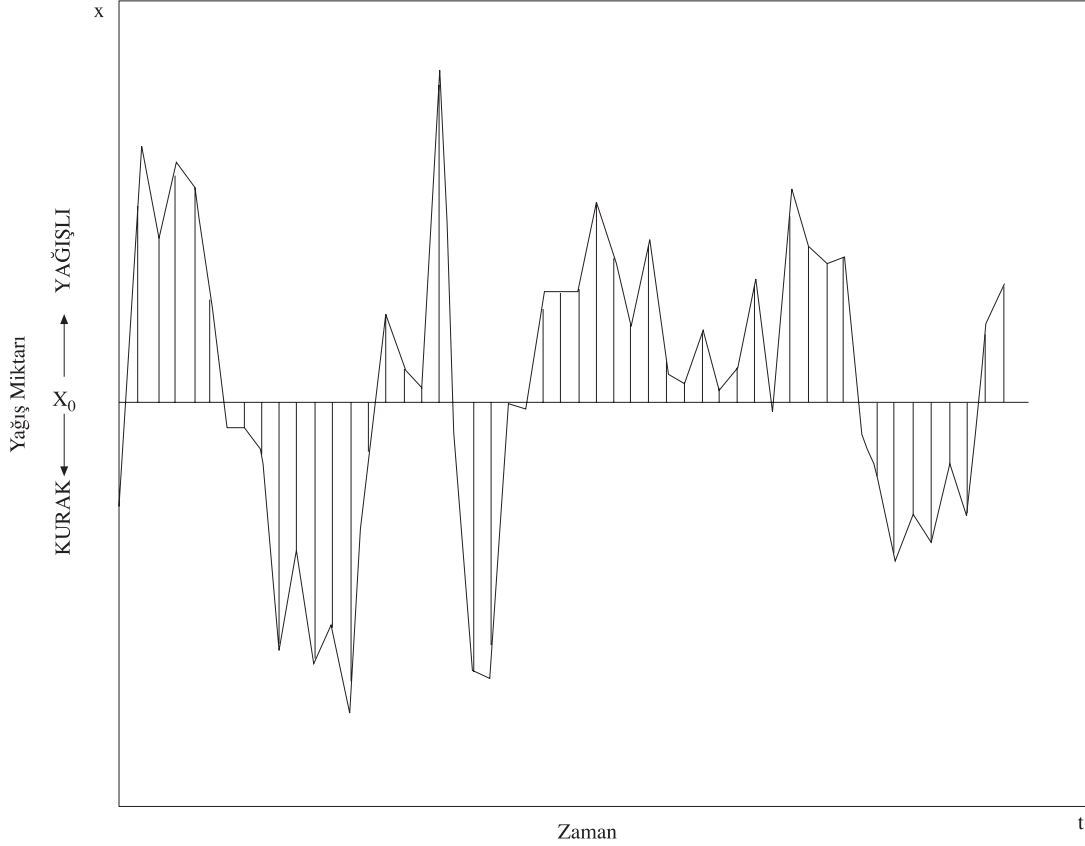
$$P(K_t) = \frac{t. \text{ günlerin kurak geçtiği yıl sayısı}}{\text{gözlem peryodu}} \quad (3)$$

$$P(K_t|K_{t-1}) = \frac{t \text{ ve } (t-1). \text{ günlerin kurak geçtiği yıl sayısı}}{(t-1). \text{ günlerin kurak geçtiği yıl sayısı}} \quad (4)$$

$$P(K_t|K_{t-1}, K_{t-2}) = \frac{t, (t-1), (t-2). \text{ günler için kurak yıl sayısı}}{(t-1), (t-2). \text{ günler için kurak yıl sayısı}} \quad (5)$$

Gözlem periyodunu 30 yıl olarak düşünürsek $P(K_t)$ başlangıç olasılığı 30 yıl üzerinden hesaplanacaktır. $P(K_t) \sim 0.30$ olduğunu varsayalım, bu durumda $P(K_t|K_{t-1})$ olasılığı 15 yıl üzerinden; eğer, $P(K_t|K_{t-1}) \sim 0.40$ kabul ed-

ersek, $P(K_t|K_{t-1}, K_{t-2})$ olasılığı maksimum 6 yıl üzerinden hesaplanacaktır. Sonuç olarak gözlem periyodu kıaldıkça olasılıkların hesabındaki hata da artacaktır.



Şekil 1. Kurak ve yağışlı devrelerin bir seri üzerinde şematik olarak gösterilmesi

Herhangi bir günün, örneğin 1 Ocak gününün kurak (K) geçmesi olasılığını $P(K)$ bulmak için gözlem periyodu içinde 1 Ocak gününün kurak geçtiği gün sayısını, gözlem periyoduna bölmek gerekecektir. Genel olarak $P(K)$ olasılığı zamanla çok yavaş değiştiğinden, bu olasılık değeri yaklaşık olarak 2, 3, 4 ve 5 Ocak günleri için de kullanılabilir. Ancak veriler arasındaki bağımlılıktan dolayı Ocak ayının ilk beş gününün kurak geçmesi olasılığının $P^5(K)$ olacağını söyleyemeyiz. Çünkü doğrudan doğruya çarpım kuralı tam bağımsızlık durumunda geçerlidir.

Bu olasılığı belirleyebilmek için gözlem periyodu boyunca, söz konusu ardışık beş günün kurak geçtiği yıl sayısını toplam periyoda bölmek gerekir (Leduc, 1987).

Markov zinciri modeline göre, her hangi bir günün yağışlı geçmesi olasılığı, bir önceki günün yağışlı geçip geçmediğine bağlıdır. Bu olasılık modelinin iki parametresi P_0 ve P_1 'dir. Burada P_0 , bir önceki günün kurak (K) geçmesi koşulu altında bir sonraki günün yağışlı (Y) geçmesi olasılığını; P_1 ise bir önceki günün yağışlı geçmesi koşulu

altında bir sonraki günün yağışlı geçmesi olasılığını gösterir. Modelle ilgili geçiş olasılıkları ve diğer önemli olasılıklar aşağıda verildiği gibidir (Weiss, 1964):

$$\begin{aligned} P_1 &= P(Y|Y) \\ (1 - P) &= P(K|Y) \\ P_0 &= P(Y|K) \\ (1 - P_0) &= P(K|K) \end{aligned} \quad (6)$$

Bu olasılıkları aşağıda verildiği gibi matris formunda ifade etmek de mümkündür.

$$T = \begin{bmatrix} P(Y|Y) & P(K|Y) \\ P(Y|K) & P(K|K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & (1 - P_1) \\ P_0 & (1 - P_0) \end{bmatrix} \quad (7)$$

T "geçiş matrisi" olarak adlandırılır ve her bir satırındaki olasılıkların toplamı olasılık teorisi gereğince 1'e eşittir (Essenwanger, 1986).

Bu notasyonlardan ve 1. mertebeden Markov zinciri özelliğinden yararlanarak uzunluğu n olan kurak ve yağışlı dönemlerin olasılıkları sırasıyla,

$$P_0(1 - P_0)^{n-1}, (1 - P_1)(P_1)^{n-1} \quad (8)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradan yararlanarak kümülatif olasılık dağılımları sırasıyla,

$$1 - (1 - P_0)^n, 1 - (P_1)^n \quad (9)$$

ve diğer taraftan uzunluğu n 'den büyük olan kurak ve yağışlı dönemlerin olasılığı da,

$$(1 - P_0)^n, (P_1)^n \quad (10)$$

ifadeleriyle verilir.

$X_0 = 0.5$ mm için, denklem (3)-(5)'den yararlanarak hesaplanan günlük $P(K_t|K_{t-1})$ ve $P(K_t|K_{t-1}, K_{t-2})$ geçiş olasılıkları Şekil 2'de verilmiştir, Şekilden de görüldüğü gibi $P(K_t|K_{t-1})$ ile $P(K_t|K_{t-1}, K_{t-2})$ arasındaki fark yılın büyük bir bölümünde ihmal edilebilecek düzeydedir. Özetle, mevcut veriler için 1. mertebeden Markov zinciri verilen bir periyodun (günlük, haftalık vb.) kurak ve yağışlı geçmesi olasılıklarının hesaplanmasına iyi bir yaklaşım sağlamaktadır. Ayrıca verilere 1. mertebeden Markov zincirinin uygulanması aşağıda sıralanan avantajları açısından da uygun olacaktır;

1- Olasılıkları hesaplamak için mevcut veri sayısı azalmayacağından tahminlerin duyarlılığı artacaktır.

2- Hesaplama süresi önemli ölçüde kısılacaktır.

Ayrıca (3) ve (4) eşitlikleriyle verilen olasılıklara ek olarak diğer kombinasyonlar aşağıda verildiği gibidir (Feyerherm ve ark., 1965; Şen, 1976).

$$P(Y_t) = 1 - P(K_t) \quad (11)$$

$$P(Y_t|K_{t-1}) = 1 - P(K_t|K_{t-1}) \quad (12)$$

$$P(K_t|Y_{t-1}) = P(K_t)P(Y_t|K_{t-1})/P(Y_t) \quad (13)$$

$$P(Y_t|Y_{t-1}) = 1 - P(K_t|Y_{t-1}) \quad (14)$$

Bu hesapların yapılabilmesi için kullanılacak ve 1. mertebeden Markov zinciri için geliştirilmiş çizelgelerden yararlanarak sırasıyla şu soruları cevaplamak mümkündür (bak. Tablo 1, 2 ve 3).

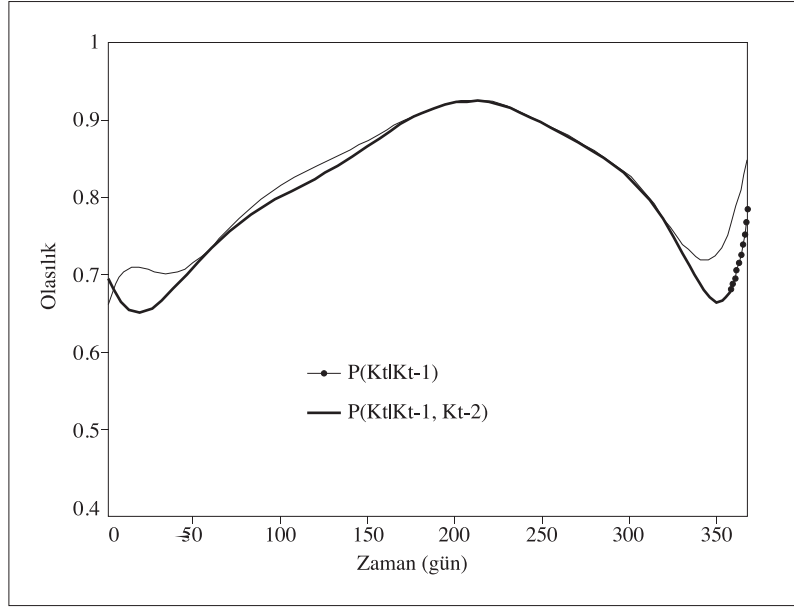
1- Yılın verilen bir gününün kurak/yağışlı geçmesi olasılığı nedir?

2- Yılın herhangi bir gününün bir önceki güne bağlı olarak kurak/yağışlı geçmesi olasılığı nedir?

3- Verilen sayıda günün, verilen bir kombinasyonunun gerçekleşmesi olasılığı nedir?

Bu çalışmada günlük ve haftalık olasılıklar yer almaktadır, ancak bazı durumlarda 2, 3, 4, ... günlük bir periyodun olasılıklarını hesaplamak gerekebilir. Örneğin 1-3 Ocak günleri için (3 gün), $s(Y)$ yağışlı gün sayısını göstermek üzere 2^3 değişik duruma karşı gelen olasılıklar Tablo 3'de verilmiştir. Bu çizelgeden de anlaşılacağı gibi, olasılıklar hesaplanırken birinci gün için başlangıç olasılığı, izleyen günler için ise geçiş olasılıkları gözönüne alınmıştır (Feyerherm ve ark., 1965). Ayrıca kurak ve yağışlı günlerin diziliş sırasının dikkate alınmaması durumunda, üç günlük bir periyot içinde sırasıyla, hiç yağış olmaması; bir günün yağışlı geçmesi; iki günün yağışlı geçmesi ve bütün periyodun yağışlı geçmesi şeklindeki olasılıkları da hesaplayabiliriz (Tablo 3'ün son sütunu).

Bu çalışmada, Göztepe meteoroloji istasyonu'nda ölçülmüş olan 30 yıllık günlük toplam yağış verileri kullanılmıştır. Bu verilerden hareketle, (11)-(14) eşitlikleri ile verilen olasılıklar $X_0 = 0.5$ mm ve $X_0 = 1.91$ mm (günlük normal) için günlük ve haftalık olarak ayrı ayrı hesaplanmıştır (bak. Tablo 1 ve 2). Eşik değeri, X_0 , arttıkça verilen bir günün kurak geçmesi olasılığının artacağı açıktır. Şekil 3 $X_0 = 1.91$ ve $X_0 = 5.0$ mm için $P(K_t|K_{t-1})$ haftalık olasılıkların grafiğini göstermektedir. olasılıkların 29. hafta (16-22 Temmuz) civarında hemen hemen simetrik bir dağılım verdiği görülmektedir.



Şekil 2. $X_0 = 0.5\text{mm}$. için $P(K_t|K_{t-1,t-2})$ ve $P(K_t|K_{t-1})$ günlük geçiş olasılıkları

Konuyla İlgili Diğer Çalışmaların Eleştirisi

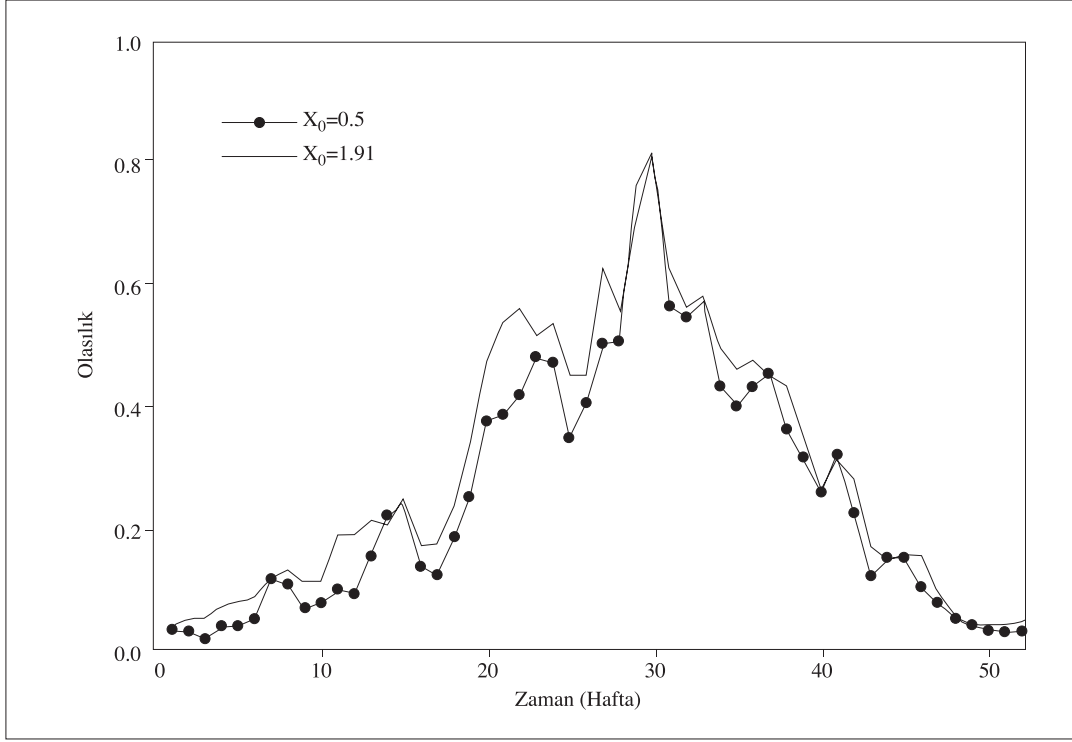
Feyerherm ve arkadaşlarınınca yapılan çalışmada haftalık olasılıklara yer verilmiştir. Ancak bu olasılıklar doğrudan haftalık olasılıklar olarak hesaplanmayıp, günlük olasılıklar esas alınarak oluşturulmuşlardır. Bunun için de önce yılın her bir günü için başlangıç ve geçiş olasılıkları hesaplanmış, günlük olasılık değişiminin ihmal edilebilir düzeyde olduğu kabul edilmiştir. Haftalık çizelgeler oluşturulurken, yedi günlük periyodun 4. gününün olasılığı o haftanın olasılığı olarak alınmıştır.

Bu çalışmada ise, daha önce de belirtildiği gibi günlük ve haftalık olasılıklar ayrı ayrı hesaplanmıştır. Yukarıda bahsedilen yaklaşımın kullanılmamasının nedenleri kısaca şöyle özetlenebilir (Koçak, 1992):

1- Günlük olasılıklar, kullanılan istatistiksel modelden dolayı belli bir hata içermektedir. Ayrıca Tablo 2, yedi günlük periyotlar göz önüne alınarak incelendiğinde, bazı periyotlar için günlük olasılık değişiminin ihmal edilebilecek düzeyde olmasına rağmen, diğer bazı periyotlar için haftanın ilk gününün olasılığı ile son gününün olasılığı arasında ihmal edilemeyecek düzeyde bir fark olduğu görülür.

Bu farkların dikkate alınmamasından kaynaklanan ikinci bir hata, doğrudan olasılıklara yansiyacaktır. Bunu önlemek için haftalık olasılıklar 7 günlük bir periyot için doğrudan hesaplanmıştır.

2- 1. mertebeden Markov zinciri yaklaşımında, veriler arasındaki bağımlılık, periyot olarak gün seçilmişse bir gün öncesine, hafta seçilmişse bir hafta öncesine gider. Feyerherm ve arkadaşlarınınca yapılan çalışmada günlük olasılıklardan haftalık olasılıklar elde edilirken bu temel kuralın da dikkate alınmadığı görülmektedir. Günlük başlangıç olasılıklarından, haftalık başlangıç olasılıklarına geçişte, 1. maddede anlatılan sakıncaların haricinde, Markov yaklaşımı açısından bir sorun yoktur, ancak sorun, geçiş olasılıklarının hesabında ortaya çıkmaktadır. Çünkü verilen bir gün için geçiş olasılığı, o gün ile bir önceki günün, diğer bir deyişle sadece 2 günün koşullu olasılığıdır. Oysa verilen bir hafta için geçiş olasılığı o hafta ile bir önceki haftanın yani 14 günlük bir periyodun koşullu olasılığıdır. Sonuç olarak günlük geçiş olasılıklarını kullanarak, haftalık geçiş olasılıklarını hesaplarken bir önceki hafta dikkate alınmamış olmaktadır. Bu da üçüncü bir hatanın hesaplara dahil edilmesi demektir.



Şekil 3. $X_0 = 0.5$ ve 1.91 mm. için $P(K_t|K_{t-1})$ haftalık geçiş olasılıkları

Sonuçlar

Bu çalışmada Markov zinciri yaklaşımı, Göztepe meteoroloji istasyonu'nda ölçülmüş olan 30 yıllık günlük toplam yağış verilerine uygulanmıştır. Bunun sonucunda Göztepe yağış verilerine 2. mertebeden Markov zinciri uygulanarak elde edilen olasılıkların, 1. mertebeden Markov yaklaşımı ile hesaplanan olasılıklara oldukça yakın sonuçlar vermesi üzerine, geçiş olasılıkları 1. mertebe üzerinden hesaplanarak çizelgeler halinde verilmiştir. Yapılan çalışmada 0.5

ve 1.91 mm eşik değerleri için hesaplanan günlük başlangıç ve geçiş olasılıkları 200. gün (19 Temmuz) civarında simetrik bir dağılım göstermektedir. Benzer şekilde 0.5 ve 1.91 mm eşik değerleri için hesaplanan, haftalık $P(K_t)$ ve $P(K_t|K_{t-1})$ geçiş olasılıkları 29. hafta (16-22 Temmuz) civarında simetrik bir dağılım göstermektedir.

Tablo 1 ve 2'nin hesaplanmasında kullanılan eşik değerler, tarım, endüstri, inşaat, turizm, spor vb. sektörlerin gereksinimleri göz önünde bulundurulmuş olarak tayin edilmelidir.

Tablo 1. $X_0 = 1.91$ mm için başlangıç ve geçiş olasılıkları

$X_0 = 1.91$ Haftalar	Başlangıç Ola.		Geçiş Olasılıkları			
	P(K)	P(Y)	P(K K)	P(Y K)	P(K Y)	P(Y Y)
1 Oc- 7 Oc	0.127	0.873	0.047	0.953	0.139	0.861
8 Oc-14 Oc	0.090	0.910	0.057	0.943	0.094	0.906
15 Oc-21 Oc	0.068	0.932	0.058	0.942	0.069	0.931
22 Oc-28 Oc	0.136	0.864	0.078	0.922	0.146	0.854
29 Oc- 4 ŞB	0.084	0.916	0.083	0.917	0.084	0.916
5 ŞB-11 ŞB	0.258	0.742	0.091	0.909	0.317	0.683

Tablo 1. devamı

$X_0 = 1.91$ Haftalar	Başlangıç Ola.		Geçiş Olasılıkları			
	P(K)	P(Y)	P(K K)	P(Y K)	P(K Y)	P(Y Y)
12 ŞB-18 ŞB	0.147	0.853	0.122	0.878	0.151	0.849
19 ŞB-25 ŞB	0.179	0.821	0.134	0.866	0.189	0.811
26 ŞB- 4 MA	0.110	0.890	0.114	0.886	0.110	0.890
5 MA-11 MA	0.235	0.765	0.114	0.886	0.272	0.728
12 MA-18 MA	0.174	0.826	0.193	0.807	0.169	0.831
19 MA-25 MA	0.248	0.752	0.191	0.809	0.266	0.734
26 MA- 1 Nİ	0.299	0.701	0.215	0.785	0.334	0.666
2 Nİ- 8 Nİ	0.402	0.598	0.206	0.094	0.533	0.467
9 Nİ-15 Nİ	0.307	0.693	0.251	0.749	0.332	0.668
16 Nİ-22 Nİ	0.227	0.773	0.171	0.829	0.244	0.756
23 Nİ-29 Nİ	0.379	0.621	0.175	0.825	0.503	0.497
30 Nİ- 6 MA	0.294	0.706	0.236	0.764	0.318	0.682
7 MA-13 MA	0.458	0.542	0.338	0.662	0.559	0.441
14 MA-20 MA	0.464	0.536	0.473	0.527	0.457	0.543
21 MA-27 MA	0.535	0.465	0.536	0.464	0.534	0.466
28 MA- 3 HA	0.593	0.407	0.559	0.441	0.642	0.358
4 HA-10 HA	0.473	0.527	0.512	0.488	0.437	0.563
11 HA-17 HA	0.689	0.311	0.535	0.465	0.971	0.029
18 HA-24 HA	0.418	0.582	0.449	0.551	0.395	0.605
25 NA- 1 TE	0.690	0.310	0.449	0.551	0.774	0.226
2 TE- 8 TE	0.688	0.312	0.624	0.376	0.829	0.171
9 TE-15 TE	0.635	0.365	0.552	0.448	0.779	0.221
16 TE-22 TE	0.870	0.130	0.694	0.306	0.948	0.052
23 TE-29 TE	0.693	0.307	0.809	0.191	0.431	0.569
30 TE- 5 AĞ	0.556	0.444	0.621	0.379	0.476	0.524
6 AĞ-12 AĞ	0.718	0.282	0.556	0.444	0.868	0.132
13 AĞ-19 AĞ	0.534	0.466	0.579	0.421	0.483	0.517
20 AĞ-26 AĞ	0.533	0.467	0.494	0.506	0.578	0.422
27 AĞ- 2 EY	0.632	0.368	0.455	0.545	0.937	0.063
3 EY- 9 EY	0.551	0.449	0.473	0.527	0.646	0.354
10 EY-16 EY	0.552	0.448	0.444	0.556	0.684	0.316
17 EY-23 EY	0.589	0.411	0.431	0.569	0.814	0.186
24 EY-30 EY	0.402	0.598	0.351	0.649	0.436	0.564
31 EY- 7 EK	0.419	0.581	0.258	0.742	0.535	0.465
8 EK-14 EK	0.470	0.530	0.310	0.690	0.612	0.388
15 EK-21 EK	0.356	0.644	0.278	0.722	0.400	0.600
22 EK-28 EK	0.250	0.750	0.167	0.833	0.277	0.723
29 EK- 4 KA	0.357	0.643	0.145	0.855	0.476	0.524
5 KA-11 KA	0.222	0.778	0.157	0.843	0.241	0.759
12 KA-18 KA	0.235	0.765	0.152	0.848	0.261	0.739
19 KA-25 KA	0.166	0.834	0.094	0.906	0.181	0.819
26 KA- 2 AR	0.098	0.902	0.053	0.947	0.103	0.897
3 AR- 9 AR	0.099	0.901	0.038	0.962	0.105	0.895
10 AR-16 AR	0.092	0.908	0.041	0.959	0.097	0.903
17 AR-23 AR	0.093	0.907	0.039	0.961	0.098	0.902
24 AR-30 AR	0.134	0.866	0.046	0.954	0.148	0.852

Tablo 2. $X_0 = 0.5$ mm için başlangıç ve geçiş olasılıkları

$X_0 = 1.91$ Haftalar	Başlangıç Ola.			Geçiş Olasılıkları		
	P(K)	P(Y)	P(K K)	P(Y K)	P(K Y)	P(Y Y)
1 OCA.	0.733	0.267	0.850	0.150	0.412	0.588
2 “ .	0.600	0.400	0.682	0.318	0.477	0.523
3 “ .	0.600	0.400	0.611	0.389	0.583	0.417
4 “ .	0.467	0.533	0.500	0.500	0.438	0.563
5 “ .	0.600	0.400	0.714	0.286	0.429	0.571
6 “ .	0.700	0.300	0.722	0.278	0.648	0.352
7 “ .	0.700	0.300	0.810	0.190	0.444	0.556
8 “ .	0.367	0.633	0.429	0.571	0.331	0.669
9 “ .	0.433	0.567	0.545	0.455	0.348	0.652
10“ .	0.500	0.500	0.846	0.154	0.154	0.846
11“ .	0.533	0.467	0.533	0.467	0.533	0.467
12“ .	0.467	0.533	0.688	0.313	0.273	0.727
13“ .	0.467	0.533	0.714	0.286	0.250	0.750
14“ .	0.500	0.500	0.786	0.214	0.214	0.786
15“ .	0.467	0.533	0.733	0.267	0.233	0.767
16“ .	0.600	0.400	0.429	0.571	0.857	0.143
17“ .	0.400	0.600	0.556	0.444	0.296	0.704
18“ .	0.533	0.467	0.750	0.250	0.286	0.714
19“ .	0.567	0.433	0.688	0.313	0.409	0.591
20“ .	0.533	0.467	0.520	0.471	0.538	0.462
21“ .	0.467	0.533	0.750	0.250	0.219	0.781
22“ .	0.467	0.533	0.500	0.500	0.438	0.563
23“ .	0.600	0.400	0.786	0.214	0.321	0.679
24“ .	0.800	0.200	0.778	0.222	0.889	0.111
25“ .	0.667	0.333	0.708	0.292	0.583	0.417
26“ .	0.533	0.467	0.550	0.459	0.514	0.486
27“ .	0.500	0.500	0.625	0.375	0.375	0.625
28“ .	0.433	0.567	0.667	0.333	0.255	0.745
29“ .	0.467	0.533	0.615	0.385	0.337	0.663
30“ .	0.467	0.533	0.643	0.357	0.313	0.688
31“ .	0.467	0.533	0.786	0.214	0.188	0.813
1 ŞUB.	0.700	0.300	0.786	0.214	0.500	0.500
2 “ .	0.600	0.400	0.762	0.238	0.357	0.643
3 “ .	0.467	0.533	0.611	0.389	0.340	0.660
4 “ .	0.467	0.533	0.714	0.286	0.250	0.750
5 “ .	0.500	0.500	0.714	0.286	0.286	0.714
6 “ .	0.700	0.300	0.867	0.133	0.311	0.689
7 “ .	0.567	0.433	0.571	0.429	0.560	0.440
8 “ .	0.633	0.467	0.647	0.353	0.610	0.390
9 “ .	0.633	0.367	0.684	0.316	0.545	0.455
10“ .	0.600	0.400	0.684	0.316	0.474	0.526
11“ .	0.667	0.333	0.722	0.278	0.556	0.444
12“ .	0.500	0.500	0.550	0.450	0.450	0.550
13“ .	0.567	0.433	0.667	0.333	0.436	0.564
14“ .	0.533	0.467	0.706	0.294	0.336	0.664
15“ .	0.433	0.567	0.625	0.375	0.287	0.713
16“ .	0.600	0.400	0.769	0.231	0.346	0.654
17“ .	0.433	0.567	0.500	0.500	0.382	0.618

Tablo 2. devamı

$X_0 = 1.91$	Başlangıç Ola.			Geçiş Olasılıkları		
Haftalar	P(K)	P(Y)	P(K K)	P(Y K)	P(K Y)	P(Y Y)
18"	0.667	0.333	0.846	0.154	0.308	0.692
19"	0.567	0.433	0.600	0.400	0.523	0.477
20"	0.700	0.300	0.882	0.118	0.275	0.725

Tablo 3. Üç günlük bir periyodun (1-3 Ocak) verilen bir kombinasyonu için olasılıkların bulunması

s(Y)	Olasılıklar	Toplam
0	$P(K,K,K)=P(K).P(K K).P(K K)=0.3054$	0.3054
1	$P(Y,K,K)=P(K).P(K K).P(K K)=0.0778$ $P(K,Y,K)=P(K).P(K K).P(K K)=0.1358$ $P(K,K,Y)=P(K).P(K K).P(Y K)=0.1944$	0.4080
2	$P(Y,Y,K)=P(Y).P(Y Y).P(K Y)=0.0814$ $P(Y,K,Y)=P(Y).P(K Y).P(Y K)=0.0495$ $P(K,Y,Y)=P(K).P(Y K).P(Y K)=0.0972$	0.2281
3	$P(Y,Y,Y)=P(Y).P(Y Y).P(Y Y)=0.0582$	0.0582
	Toplam	0.9997

Semboller Tablosu

X_i : Gözlem seti
 X_0 : Eşik değer
 K : Kurak periyot (gün, hafta vb.)

Y : Yağışlı periyot (gün, hafta vb.)
 $P(K_t)$: Başlangıç olasılığı
 $P(K_t|K_{t-1})$: Geçiş olasılığı
 T : Geçiş matrisi

Kaynaklar

- Delleur, J. W., "Simulation Models of Sequences of Dry and Wet Days", Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 115 (3), 344-357, 1989.
- Essenwagner, O. M., "General Climatology, World Survey of Climatology, 1B", Elsevier Science Publ. B. U., Amsterdam, 1986.
- Feyerherm, A. M., Bark, L. D., "Statistical Methods for Persistent Precipitation Patterns", Journal of Applied Meteorology, 4, 320-328, 1964.
- Feyerherm, A. M., Bark, L. D., and Burrows, W. C., "Probabilities of Sequences of Wet and Dry Days in Missouri", North Central Regional Res., Publ. 161, Kansas Tech. Bul. 139d, Manhattan, 1965.
- Koçak K., "Yağış Verilerinin Autorun Analizi", Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 1992.
- Leduc, S., "Statistical Methods in Applied Climatology", University of Missouri, Columbia, 1987.
- Şen, Z., "Wet and Dry Periods of Annual Flow Series" Journal of Hydraulics, ASCE, 102, No: Hy10, Proc. Paper 12457, 1503-1514, 1976.
- Şen, Z., "Autorun Analysis of Hydrologic Time Series", Journal of Hydrology, 36, 78-85, 1978.
- Şen, Z., "Critical Drought Analysis by Second-Order Markov Chain", Journal of Hydrology, 120, 183-202, 1990.
- Weiss, L. L., "Sequences of Wet and Dry Days Described by a Markov Chain Probability Model", Monthly Weather Review, 92(4), 169-176, 1964.