Tr. J. of Engineering and Environmental Science
23 (1999) , 133 – 147.


# Sakarya Havzasındaki Aylık Akımların Çok Değişkenli Stokastik Modellemesi

**M. Çağatay KARABÖRK, Ercan KAHYA**
*Selçuk Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü,*
*Kampüs, Konya-TÜRKİYE*

Geliş Tarihi 21.09.1998

**Özet**

Sakarya havzasında bulunan 12 akım gözlem istasyonunda ölçülen aylık akımların çok değişkenli periyodik otoregressif (PAR) ve periyodik otoregressif-hareketli ortalama (PARMA) modellerinin matematiksel ifadeleri elde edilmiştir. Bu modellerin metodolojisi ayrıntılı olarak beş aşamada (ön analiz, parametrelerin tahmini, uygunluk testi, ilave testler ve parametrelerin güvenirliliğinin kontrolü) verilmiştir. Açıklamaların kolay anlaşılabilir olması için yıllık çok değişkenli AR ve ARMA modellerinin metodolojileri öncelikle ele alınmıştır.

Analizlere daha pratik olduğu için PAR(1) modeli ile başlanmış, fakat bu modelin tarihi seriye ait çapraz korelasyon yapısını muhafaza etmediği görülmüştür. Ön analiz aşamasında tarihi seri korelogramlarında uzun dönemli zaman bağımlılık yapısı gözlendiğinden modelleme işlemlerine çok değişkenli ARMA(1,1) modeli ile devam edilmiştir. Bu modelin tarihi serilerin hem ayrı ayrı istatistiksel momentlerini hem de çapraz korelasyon yapısını muhafaza etmesi sebebiyle Sakarya Havzası için geçerli bir model olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Çok değişkenli otoregressif model, otoregressif-hareketli ortalama modeli, Sakarya Havzası, Stokastik modelleme.

## Multivariate Stochastic Modeling of Monthly Streamflow of Rivers in the Sakarya Basin

**Abstract**

Mathematical expressions of multivariate periodic autoregressive (PAR) and periodic autoregressive-moving average (PARMA) models were obtained for monthly streamflow observations of 12 stations located in Sakarya Basin, Turkey. The methodology of both models was given in detail at five phases (preliminary analysis, estimation parameters, goodness of fit test, optional tests, and reliability of estimated parameters). For the purpose of methodological to be easily understood, the methodological procedures of annual multivariate AR and ARMA models were firstly presented.

Because of being more practical PAR(1) model was initially considered in the analyses, but it was found that this model did not preverse the cross-correlation structure of historical series. Since a long-term dependency structure was observed in the correlograms of historical series in the phase of preliminary analysis, the modeling procedures were continued with the multivariate ARMA(1,1) model. This model was proven to be suitable for Sakarya Basin due to the fact that statistical moments of individual stations as well as cross correlation structures of all stations were satisfactorily preserved in the generated synthetic series.

**Key Words:** Multivariate autoregressive model, multivariate autoregressive-moving average model, Sakarya basin, stochastic modeling.

## Giriş

Bir çizgi ya da alan boyunca gözlenmiş değişkenler, çoklu zaman serilerini ya da genel bir ifadeyle çok değişkenli serileri ifade ederler. Herbir zaman serisinin istatistiksel analizini, serileri ayrı ayrı ele alarak yapmak mümkündür (Box ve Jenkins, 1970; Salas ve arkadaşları, 1980; Karabörk ve Kahya, 1998). Bununla beraber, genellikle, bu n adet serinin stokastik (rasgele) bileşenleri, ortak bağımlılıkları bulunan rasgele değişkenlerdir. Diğer bir deyişle, bu serilerin stokastik bileşenleri, kendi aralarında bağımlı n adet zaman serisini ifade etmektedirler. Çeşitli noktalara (gözlem istasyonlarına) ait sentetik serileri, yukarıda bahsedilen bağımlılık yapısını muhafaza ederek üretmek amaçlandığı zaman, sadece n adet zaman serisinin ayrı ayrı istatistiksel karakteristiklerini değil; aynı zamanda, bu serilerin ortak bağımlılık yapılarını da korumak gereklidir (Salas ve arkadaşları, 1980; Haan, 1977).

Yıllık serilerin çok değişkenli modellerine, özellikle, su kaynakları sistemlerinin yıllık işletme planları için gerek duyulan sentetik serilerin elde edilmesi için ihtiyaç duyulmaktadır. Periyodik (aylık, haftalık, vs) çok değişkenli modeller ise, çeşitli noktalara ait çoklu periyodik serilerin üretilmesi amacıyla kullanırlar. Örnek olarak, bir kaç rezervuardan oluşan bir su kaynağı sistemi için, bu sistemin simulasyonuna ve işletmesine yönelik olarak, birkaç noktada birden nehir akımlarının sentetik olarak üretilmesi gerekebilir. Bu durumda, elde çeşitli istasyonlarına ait kullanılabilir aylık akım verileri varsa, modelleme doğrudan doğruya aylık akımlar için yapılır. Eğer aylık akımların yerine yağış kayıtları varsa, yağış kayıtları için kurulacak çok değişkenli periyodik bir model ile sentetik yağış serileri üretilir ve daha sonra bu seriler, o bölge için geçerli bir yağış-akım modeli ile akım serilerine dönüştürülür. Çok değişkenli stokastik modeller ile elde edilen sentetik seriler, çeşitli deterministik benzetim modellerine girdi olarak da kullanılabilir.

1960'lı yılların başlarından bu yana, hidrolojik serilerin stokastik karakteristikleri ve tek değişkenli (tek istasyonlu) hidrolojik serilerin sentetik olarak üretilmesine ilişkin metotlar üzerindeki çalışmalar artarak süregelmiştir. Su kaynakları sistemlerinin planlanması, dizaynı ve işletilmesi, genellikle, birkaç hidrolojik seriyi birden ihtiva ettiği için, çok değişkenli stokastik analiz ve çok değişkenli modelleme önemli bir konudur (Pegram ve James, 1972). Literatürde çok değişkenli modellemeye ilişkin önerilen çeşitli metotlar bulunmaktadır. Bu çalışmada, yıllık ve periyodik (aylık) seriler için çok değişkenli otoregressif (AR) ve çok değişkenli otoregressif-hareketli ortalama (ARMA) modelleri ele alınarak modelleme prosedürü ayrıntılı olarak sunulmuştur. Çalışmanın uygulama bölümünde, Sakarya Havzası'ndaki 12 adet istasyonda ölçülen aylık akımların stokastik modelleri kurulmuştur.

## Metodoloji

Bu çalışmada hem yıllık hem de aylık seriler için iki ayrı prosedür Salas ve ark. (1980) kaynağına dayanılarak sunulmaktadır. Birinci prosedür, çok değişkenli AR(1) ve AR(2) modellerine dayalı ve sabit matris parametrelerle ifade edilen süreç; diğeri ise tek değişkenli AR(p) ve ARMA(p,q) modellerine dayalı, zamanda içsel bağımlılığı, uzayda ise bağımsız artık serilerin ($\varepsilon_t$) sıfır ötelemedeki karşılıklı bağımlılığını esas alan bir yaklaşımdır.

### Genel Matematiksel Modeller

Kararlı yapıdaki $z_t^{(i)}$, i=1,. . .,n serisini göz önüne alalım. $z_t^{(i)}$ serisinin normal dağıldığını ya da normal dağılıma uygun hale getirildiğini kabul edelim. $z_t^{(i)}$ serisinin AR(1) modeli (bir ötelemeli çok değişkenli otoregressif model) matris formunda aşağıdaki şekilde verilebilir.

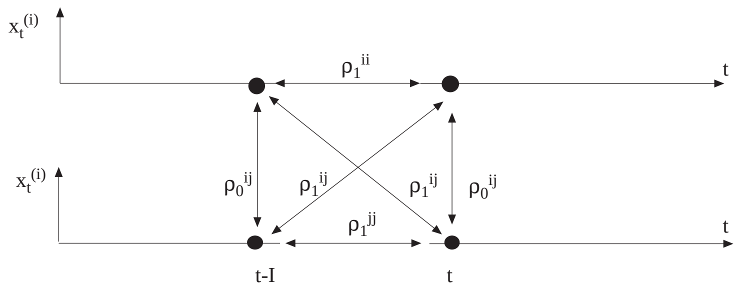
$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + B\underline{\varepsilon}_t \tag{1}$$

Yukarıda $Z_t, z_t^{(i)}$ serisinin elemanlarından oluşan (n×1) boyutunda bir vektör, $A_1$ ve B (n×n) boyutlarında matris parametreler ve $\underline{\varepsilon}_t$ ise (n×1) boyutunda bağımsız, normal dağılıma uyan, ortalaması sıfır ve varyansı bir olan rasgele değişkenlerden oluşan bir vektördür. $\underline{\varepsilon}_t$ vektörünün zaman ve uzay bağımlılığının olmadığı kabul edilir. (1) denklemi açık olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

(1) ve (2) ifadelerindeki $Z_t$'nin bağımlılık yapısı, uzayda sıfır ve bir ötelemelerdeki çapraz korelasyona ve zamanda birinci ötelemeki serisel korelasyona işaret eder. Bu tipteki bağımlılık yapısı Şekil 1'de grafiksel olarak verilmiştir. Şekildeki yatay oklar, birinci ötelemedeki otokorelasyon katsayıları olan $\rho_1^{ii}$ ve $\rho_1^{ij}$ değerlerini, diyagonal oklar birinci ötelemedeki çapraz korelasyon katsayıları olan $\rho_1^{ij}$ ve $\rho_1^{ji}$ değerlerini, dikey oklar ise sıfır ötelemedeki çapraz korelasyon katsayıları olan $\rho_0^{ij}$ değerlerini

ifade etmektedir. Bu korelasyon yapısının sabit olduğu kabul edilirse $\rho$ katsayıları (t, t+1), (t+1, t+2),... için aynı olur.

$$\begin{bmatrix} z_t^{(1)} \\ z_t^{(2)} \\ . \\ . \\ z_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} & . & . & . & a^{ln} \\ a^{21} & a^{22} & . & . & . & a^{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a^{n1} & a^{n2} & . & . & . & a^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t-1}^{(1)} \\ z_{t-1}^{(2)} \\ . \\ . \\ z_{t-1}^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^{11} & b^{12} & . & . & . & b^{ln} \\ b^{21} & b^{22} & . & . & . & b^{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b^{n1} & b^{n2} & . & . & . & b^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{(1)} \\ \varepsilon_t^{(2)} \\ . \\ . \\ \varepsilon_t^{(n)} \end{bmatrix} \quad (2)$$




**Şekil 1.** Bir ötelemeli çok değişkenli otoregressif modellere (AR(1)) ait korelasyon yapısının şematik gösterimi

Benzer şekilde AR(2) çok değişkenli iki ötelemeli otoregressif model aşağıdaki şekilde yazılır.

$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + A_2 Z_{t-2} + B\underline{\varepsilon}_t \quad (3)$$

Yukarıdaki ifadede t anındaki Z vektör değerleri, t-1 ve t-2 anlarındaki Z vektör değerlerine ve $\underline{\varepsilon}_t$ rasgele vektörüne bağlıdır. Model parametreleri (n×n) boyutundaki $A_1$, $A_2$ ve B matrislerinin elemanlarıdır.

### Otoregressif modeller

Yıllık serilerin çok değişkenli otoregressif AR(1) ve AR(2) modellerinin kurulmasında n adet istasyonda ölçülen ve herbiri aynı uzunluğa sahip serilerden oluşan $x_t^{(i)}$(i=1,..., n) zaman serisini göz önüne alalım. $x_t^{(i)}$ normal ya da çarpık bir dağılıma sahip olabilir. Normal ya da normal hale dönüştürülmüş seri $y_t^{(i)}$ ile genel bir model aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$y_t^{(i)} = \mu^{(i)} + \sigma^{(i)} z_t^{(i)} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \quad (4)$$

Yukarıda $\mu^{(i)}$ ve $\sigma^{(i)}$ sırasıyla $y_t^{(i)}$ serisinin ortalaması ve standart sapması, $z_t^{(i)}$ ise zamanda içsel bağımlılığı, uzayda çapraz bağımlılığı olan standardize değişkendir. Matris formunda (4) denklemi $Y_t = \underline{\mu} + \underline{\sigma} Z_t$ şeklinde yazılır. Burada AR(1) ve AR(2) süreçlerinde bağımlı serilerin vektörü olan $Z_t$ için sırasıyla (1) ve (3) ifadeleri ile kullanılır.

Ön analiz aşamasında, ilk olarak tarihi $x_t^{(i)}$ (i=1,...,n) zaman serisinin normal dağılıp dağılmadığı çarpıklık testi ile kontrol edilir. Çarpıklığı büyük olan seriler uygun bir dönüşüm ile normal hale dönüştürülerek $y_t^{(i)}$ serileri elde edilir. Bunlardan tarihi serilerinin $r_k^{(i)}$ otokorelogramları ve $\phi_k^{(i)}$ kısmi korelogramları hesaplanarak olası model hakkında ön değerlendirme yapılır (Salas ve ark., 1980; Karabörk ve Kahya, 1998).

Parametre tahmini aşamasında seçilen modele ait parametrelerin tahmini için öncelikle örnek ortalamaları $\hat{\mu}^{(i)}$ ve örnek standart sapmaları $\hat{\sigma}^{(i)}$ hesaplanır. Daha sonra standardize $z_t^{(i)}$ serisi $z_t^{(i)} = (y_t^{(i)} - \hat{\mu}^{(i)})/\hat{\sigma}^{(i)}$ şeklinde hesaplanır.

Bölgedeki n adet zaman serisi arasındaki bağımlılık yapısı, k ötelemedeki çapraz korelasyon katsayıları ile ifade edilir. $x_t^{(i)}$ ve $x_t^{(j)}$ zaman serileri göz önüne alındığında k ötelemedeki çapraz korelasyon katsayısı ($r_k^{ij}$) açık seri varsayımına dayalı formül ile hesaplanır.

Eldeki tarihi serinin çapraz korelasyon yapısını ortaya koymak için ilk olarak $r_0^{ij}, r_1^{ij}$ ve $r_2^{ij}$ korelasyon katsayıları hesaplanarak $\hat{M}_0, \hat{M}_1$ ve $\hat{M}_2$ korelasyon matrisleri oluşturulur. Daha sonra $\hat{M}_1^T$ ve $M_2^T$ transpoze matrisleriyle $M_0^{-1}$ ters matrisi hesaplanır. Eğer seçilen model AR(1) ise, $\hat{(A)}_1$ matris parametreleri ve $\hat{B}\hat{B}^T$ çarpımı aşağıdaki denklemlerde hesaplanır (Matalas, 1967).

$$\hat{A}_1 = \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \quad (5)$$

$$\hat{B}\hat{B}^T = \hat{M}_0 - \hat{A}_1 \hat{M}_1^T \quad (6)$$

Diğer yandan seçilen model AR(2) ise $\hat{(A)}_1$, $\hat{(A)}_2$ matris parametreleri ile $\hat{B}\hat{B}^T$ çarpımı aşağıdaki denklemlerde hesaplanır (Salas ve Pegram, 1978). $\hat{B}\hat{B}^T$ çarpımından hareketle $\hat{B}$ matrisini elde etmek için $\hat{B}$ matrisi alt üçgen matris olarak kabul edilir.

$$\hat{A}_1 = [\hat{M}_1 - \hat{M}_2 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1^T][\hat{M}_0 - \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1^T]^{-1} \quad (7)$$

$$\hat{A}_2 = [\hat{M}_2 - \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1][\hat{M}_0 - \hat{M}_1 \hat{M}_0^{-1} \hat{M}_1]^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{B}\hat{B}^T = \hat{M}_0 - [\hat{A}_1 \hat{M}_1^T + \hat{A}_2 \hat{M}_2^T] \quad (9)$$

Seçilen modelin uygunluğunun test edilmesi aşamasında model varsayımlarından biri olan artık serilerinin bağımsızlığının kontrolü yapılır. AR(1) ve AR(2) modelleri için artık seriler (1) ve (3) denklemlerinden elde edilir. Artık serilerin çapraz korelasyon katsayıları ve $(+\pm u_{1-\alpha/2}/\sqrt{N})$ ifadesi ile güven limitleri hesaplanır. Burada $u_{1-\alpha/2}$ istenilen olasılık seviyesindeki standart normal değişken ve N ise herbir serinin eleman sayısıdır. Ayrıca herbir artık serinin zamanda bağımlılığını gösteren $r_k^{ii}$ otokorelasyon katsayıları ve bunlara ait güven aralıkları hesaplanır. Hem $r_0^{ij}$ hem de $r_k^{ii}$ değerlerinin kendilerine ait güven limitlerinin içine düşmesi durumunda artık serilerin bağımsız olduğu sonucuna varılarak modelleme prosedürüne devam edilir. Aksi takdirde modelin derecesi ya da tipi değiştirilir.

Modele ait ilave testler aşamasında, kurulan model ile üretilen sentetik serilerin tarihi seriye ait karakteristikleri koruyup korumadığı kontrol edilir. AR(1) ve AR(2) modelleri için aşağıdaki denklemler kullanılır.

$$\hat{Z}_t = \hat{A}_1 \hat{Z}_{t-1} + \hat{B}\underline{\varepsilon}_t \quad (10)$$

$$\hat{Z}_t = \hat{A}_1 \hat{Z}_{t-1} + \hat{A}_2 \hat{Z}_{t-2} \hat{B}\underline{\varepsilon}_t \quad (11)$$

Çok değişkenli AR(1) modeliyle $N_g$ yıl uzunluğunda sentetik seri üretmek için şu adımlar izlenir: (i) Standardize bağımsız rasgele $\varepsilon_1^{(1)}, \ldots, \varepsilon_1^{(1)}$ sayıları üretilir. (ii) Denklem (10) kullanılarak ve $\hat{z}_0^{(n)}$ terimleri sıfır kabul edilerek $\hat{z}_0^{(1)}, \ldots, \hat{z}_0^{(n)}$ terimleri sıfır kabul edilerek $\hat{z}_1^{(1)}, \ldots, \hat{z}_1^{(n)}$ terimleri hesaplanır. Daha sonra yeni bir standardize bağımsız rasgele $\varepsilon_2^{(1)}, \ldots, \varepsilon_2^{(n)}$ seti üretilir ve $\hat{z}_1^{(1)}, \ldots, \hat{z}_1^{(n)}$ terimleri kullanılarak $\hat{z}_2^{(1)}, \ldots, \hat{z}_2^{(n)}$ serisi elde edilir. İşlemlere bu şekilde $\hat{z}_N^{(1)}, \ldots, \hat{z}_{N\prime}^{(n)}$ serisi üretilinceye kadar devam edilir. Burada N′ değeri $N_W + N_g$'ye eşittir. $N_w$ başlangıç şartlarının etkisinin kalkması için gerekli olan zaman uzunluğudur ve 50 olarak alınması tavsiye edilir. $N_g$ ise istenilen sentetik seri uzunluğudur. (iii) $\hat{z}_N^{(i)}, \ldots, \hat{z}_N^{(i)}$, i=1,…,n, serisinin ilk $N_w$ adet terimi atılarak $N_g$ yıl uzunluğunda bir seri elde edilir. $Z_t$ serisi üretildikten sonra aşağıdaki denklem ile $y_t^{(i)}$ serisi elde edilir.

$$\hat{y}_t^{(i)} = \hat{\mu}^{(i)} + \hat{\sigma}^{(i)} \hat{z}_t^{(i)}, i=1, \ldots, n, t=1, \ldots, N_g \quad (12)$$

Eğer tarihi seriyi normal hale getirmek için herhangi bir dönüşüm yapılmış ise bu dönüşümün ters fonksiyonu ile sentetik orijinal seri elde edilir. Bu noktada, normal ve lognormal değişkenlerin karışımı ile ifade olunan bir sürecin sentetik üretimini araştıran Mejia ve ark. (1974) dönüşümlerin tarihi serinin istatistiklerini koruması gerektiğini belirtmişlerdir. İstenilen sayıda (50 ya da 100) sentetik seri üretildikten sonra her bir j sentetik serisi için ortalamalar $\mu^{(i)}(j)$, standart sapmalar $\sigma^{(i)}(j)$, korelogramlar $r_k^{(i)}(j)$ ve çapraz korelasyon matrisleri $M_0(j), M_1(j), M_2(j)$ hesaplanır. Hesaplanan bu istatistiksel karakteristiklere ait ortalamalar ve standart sapmalar hesaplanarak güven aralıkları oluşturulur (Karabörk ve Kahya, 1998).

Model parametrelerinin güvenilirliği aşamasında, model parametrelerine ait bir güven aralığı bulmak ve bu suretle parametrelerin güvenilirliği hakkında bir bilgi sahibi olmak mümkündür. Bunun için modelin parametreleri üretilen tüm sentetik seriler için yeniden hesaplanarak ortalamaları ve standart sapmaları bulunur ve güven aralıkları hesaplanır.

Birçok su sistemlerinin analizinde yıl içi varyasyonları (ki ıslak ve kuru periyodları ortaya çıkarır) göz önüne alan yıl içi akım üretimi gerekli olur. Bu ya yıllık akımların ayrıştırılması (Valencia ve Schaake, 1973) ya da ardışık olarak mevsimsel akımların sentetik olarak elde edilmesi ile mümkündür (Loucks ve ark., 1981). Bu çalışmada ikinci yaklaşım ele alınacaktır. Periyodik serilerin çok değişkenli otoregressif AR(1) ve AR(2) modellerinin kurulması için n adet farklı istasyonda ölçülen ve normal dağılıma uyan $y_{v,t}^{(i)}$ periyodik hidrolojik zaman serisini göz önüne alalım. Bu seriyi temsil etmek için genel bir model aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$y_{v,t}^{(i)} = \mu_\tau^{(i)} + \sigma_\tau^{(i)} z_{v,t}^{(i)}, i = 1, \ldots, n \quad (13)$$

Yukarıda $y_{v,t}^{(i)}$: i istasyonunda $\tau(\tau = 1, \ldots, w)$ zaman aralığı (ay, mevsim vs) ve v yılındaki orijinal periyodik hidrolojik seriyi, $\mu_\tau^{(i)}$ ve $\sigma_\tau^{(i)}$ : $\tau$ zaman dilimindeki ve i istasyonundaki periyodik ortalama ve periyodik standart sapmayı, $z_{v,t}^{(i)}$: $y_{v,t}^{(i)}$ serisinin standardize şeklini ifade etmektedir. $z_{v,t}^{(i)}$ serisini sabit ya da periyodik parametrelerle modellemek mümkün olmakla beraber bu çalışmada sabit parametreli modeller ele alınmıştır. $z_{v,t}^{(i)}$ serisi $z_t^{(i)}$ (t=(v-1)w+$\tau$) şeklinde ifade edildiği takdirde AR(1) modeli için (1), AR(2) modeli içinse (3) ifadeleri ile temsil edilebilir.

Çok değişkenli aylık bir hidrolojik serinin sabit parametreli otoregressif modelini kurmak için öncelikle $x_{v,t}^{(i)}$ (i=1,...,n) tarihi serisinin normal dağılıma uyup uymadığı kontrol edilerek eğer gerekliyse uygun bir dönüşüm ile normal dağılmış $y_{v,t}^{(i)}$ serisi elde edilir (Karabörk ve Kahya, 1998). Daha sonra periyodik ortalamalar ve periyodik standart sapmalar hesaplanarak $z_{v,t}^{(i)}$=($y_{v,t}^{(i)}$-$\hat{\mu}_\tau^{(i)}$/$\hat{\sigma}_\tau^{(}i$)) denklemi ile standardize $z_{v,t}^{(i)}$ serisi elde edilir. Bu noktadan itibaren $z_{v,t}^{(i)}$ serisi $z_t^{(i)}$ (t=(v-1)w+$\tau$) şeklinde ele alınır ve modelleme işlemi yıllık bir serinin modellenmesine benzer şekilde yapılır. Model kurulduktan ve sentetik $z_{v,t}^{(i)}$ serileri üretildikten sonra seriden uzaklaştırılan periyodik karakteristikler tekrar seriye kazandırılarak sentetik $y_{v,t}^{(i)}$ serileri, eğer bir dönüşüm uygulanmış ise ters dönüşüm ile sentetik $x_{v,t}^{(i)}$ serileri elde edilir. Daha sonra bu sentetik serileri kullanarak daha önce belirtilen şekilde, tarihi karakteristiklerin güven aralıkları hesaplanarak modelin tarihi seriyi temsil edip etmediği kontrol edilir. İstendiği takdirde sentetik serilerden hareketle model parametrelerinin güven aralıkları da bulunabilir.

## Otoregressif-hareketli ortalama modelleri

Yıllık ve periyodik otoregressif-hareketli ortalama (ARMA(p,q)) modelleri serilerin zamanda içsel bağımlılığını, uzayda ise sıfır ötelemede karşılıklı korelasyonunu göz önüne alan bir yaklaşımdır. Bu, ilk olarak çok değişkenli serinin ARMA(p,q) modeli ile zamansal korelasyonun modellenmesi, daha sonra zamandan bağımsız artık serilerin uzaysal korelasyonunun modellenmesi şeklinde yapılmaktadır. Normal dağılıma uyan yıllık $y_t^{(i)}$ (i=1, ...,n) serisini göz önüne aldığımız zaman bu seriyi temsil eden genel bir model (4) ifadesinde verilen şekilde kurulabilir. (4) ifadesindeki $Z_t$ çok değişkenli serisinin zaman bağımlılığının ARMA(p,q) süresince uyduğu kabulüyle, bu bağımlılık aşağıdaki şekilde modellenebilir.

$$z_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{p(i)} \phi_j^{(i)} z_{t-j} + \varepsilon_t^{(i)} - \sum_{i=1}^{q(i)} \theta_j^{(i)} \varepsilon_{t-j}^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{14}$$

Yukarıda $z_t^{(i)}$: ARMA(p(i),q(i)) süresine uyan bağımlı değişken, $\varepsilon_t^{(i)}$ : ortalaması sıfır, varyansı $\sigma_\varepsilon^2$ olan zamanda bağımlı ama uzayda bağımsız değişken, $\phi^{(i)} : \phi_1^{(i)}, \ldots, \phi_{p(i)}^{(i)}$ otoregressif parametre seti, $\theta^{(i)} : \theta_1^{(i)}, \ldots, \theta_{q(i)}^{(i)}$ hareketli ortalama parametre seti, p(i) ve q(i): sırasıyla otoregressif ve hareketli ortalama bileşenlerinin dereceleri, (i): alt serilerdir.

Yıllık hidrolojik $x_t^{(i)}$(i=1,...n) serisinin ARMA(p,q) modelinin kurulması için ilk olarak serinin normal uygunluğu kontrol edilir. Ön analiz aşamasında kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının hangi öteleme derecelerinde önemli değerler aldığına bakılarak otoregressif bileşenin p(i) dereceleri seçilir. Hareketli ortalama bileşeninin q(i) derecesi ise genellikle bir alınır. Daha sonra her bir i. serinin zaman bağımlılıkları modellenir.

Modelin uzaysal bağımlılığını oluşturmak için ilk olarak aşağıda verilen (15) denklemi ile her bir i serisi için $\varepsilon_t$ artık serisi bulunur.

$$\varepsilon_t^{(i)} = z_t^{(i)} \sum_{j=1}^{p(i)} \phi_j^{(i)} z_{t-j} + \sum_{i=1}^{q(i)} \theta_j^{(i)} \varepsilon_{t-j}^{(i)}, \quad \varepsilon_j = 0(j = 1, \ldots, maksimum(p, q)) \tag{15}$$

Daha sonra $\varepsilon_t'^{(i)} = \varepsilon_t^{(i)} / \sigma_\varepsilon^{(i)}$ standardize serisi, $\chi_t = \hat{B}^{-1} \underline{\varepsilon}_t'$ denklemi ile de zaman ve uzay bağımlılığı bulunmayan standardize $\chi_t$ serisi elde edilir.

$\chi_t$ serisinin hesabından sonra, bu seriye $r_0^{ij}$ (i,j=1,...,n) değerleri ve bunlara ait güven aralıkları hesaplanarak $\chi_t$ serisinin çapraz korelasyonu olup olmadığı kontrol edilir. Ayrıca $\chi_t$ serisine ait otokorelasyon katsayıları olan $r_k^{ii}$ (i=1,...,n) değerleri ve bunlara ait güven aralıkları da hesaplanarak artık serilerin zamanda bağımlılığı olup olmadığı kontrol edilir. Yukarıdaki kontrollerin sonucunda artık serilerin zamanda ve uzayda bağımlılığının olmadığı yönündeki model varsayımları kabul edilirse işlemlere devam edilir, aksi takdirde model değiştirilir.

Modele ait parametreler belirlendikten ve model varsayımlarının sağlandığı kabul edildikten sonra kurulan modeli kullanarak sentetik seriler üretilir. (4)

ifadesindeki $z_t^{(i)}$ terimi, kurulan ARMA(p,q) modeli ile aşağıda verilen ifade ile üretilir.

$$\bar{z}_t^{(i)} = \hat{\phi}_1^{(i)} \hat{z}_{t-1}^{(i)} + \ldots + \bar{\phi}_{p(i)}^{(i)} \hat{z}_{t-p(i)}^{(i)} + \hat{\varepsilon}_t^{(i)} - \hat{\theta}_1^{(i)} - \hat{\theta}_1^{(i)} \hat{\varepsilon}_{t-1}^{(i)} - \ldots - \hat{\theta}_{q(i)}^{(i)} \hat{\varepsilon}_{t-q(i)}^{(i)}, \qquad (16)$$

Yukarıdaki ifadede $\hat{\phi}_1^{(i)}, \ldots, \hat{\phi}_{p(i)}^{(i)}$ tahmin edilen otoregressif parametreler; $\hat{\theta}_1^{(i)}, \ldots, \hat{\theta}_{q(i)}^{(i)}$ hareketli ortalama parametreleri; $\hat{\varepsilon}_t^{(i)} = \hat{\sigma}_\varepsilon^{(i)} \hat{\varepsilon}_t'^{(i)}$ bağımsız seri olup $\hat{\varepsilon}_t'^{(i)}$ terimleri ise aşağıdaki ifade ile hesaplanır.

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_t'^{(1)} &= \hat{b}^{11} \chi_t^{(1)} + \ldots\ldots + \hat{b}^{ln} \chi_t^{(n)} \\ \hat{\varepsilon}_t'^{(2)} &= \hat{b}^{21} \chi_t^{(1)} + \ldots\ldots + \hat{b}^{2n} \chi_t^{(n)} \\ &. \quad . \quad . \\ &. \quad . \quad . \\ \hat{\varepsilon}_t'^{(n)} &= +\hat{b}^{nl} \chi_t^{(1)} + \ldots\ldots + \hat{b}^{nn} \chi_t^{(n)} \end{aligned} \qquad (17)$$

Yukarıda $\chi_t^{(i)}$ standardize bağımsız rasgele sayılar ve $\hat{b}^{ij}$ (i,j=1,. . ., n) terimleri $\hat{B}$ matrisinin elemanlarıdır. Çok değişkenli ARMA(p,q) modelleri ile sentetik seri üretimi için standardize rasgele bağımsız $\chi_1^{(i)}, \ldots, \chi_1^{(i)}$ sayıları üretildikten sonra yukarıda verilen ifadeler otoregressif modeller bölümünde verilen prosedüre benzer şekilde kullanılır.

İstenilen sayıda sentetik serinin üretilmesinden sonra, korelogram, ortalama, standart sapma ve artık serilerin çapraz korelasyonu gibi tarihi seriye ait istatistiksel karakteristiklerin, sentetik seriler tarafından korunup korunmadığı kontrol edilir. Eğer bazı karakteristiklerin korunmadığı ortaya çıkarsa modelin reddi ya da kabulü konusundaki karar araştırıcının sonuçları ne derece önemli bulduğuna bağlıdır. Bu kontrollerden sonra istendiği takdirde model parametrelerinin güven aralıklarının hesaplanması ve bu suretle parametrelerin güvenilirlikleri hakkında bir bilgi sahibi olmak da mümkündür.

Periyodik serilerin çok değişkenli otoregressif-hareketli ortalama modellerinin kurulması önce çok değişkenli serinin ARMA(p,q) modeli ile zamansal korelasyonunun modellenmesi, sonra zamandan bağımsız artık serilerin uzaysal korelasyonun modellenmesi şeklinde yapılır. Normal dağılıma uyan $y_{v,\tau}^{(i)}, (i = 1, \ldots, n; \tau = 1, \ldots, w; v = 1, \ldots, N)$ serisini göz önüne aldığımız zaman, bu seriyi temsil eden genel bir model (13) ifadesinde verilen şekilde kurulabilir. Burada $z_{v,\tau}^{(i)}$ serisi $z_t^{(i)}(t = (v-1)w + \tau)$ şeklinde ifade edilirse çok değişkenli zaman serisinin zaman bağımlılığı da bu çalışmada ele alınan sabit parametreli ARMA(p,q) süreci ile (14) ifadesinde verilen şekilde modellenebilir.

Çok değişkenli aylık bir hidrolojik serinin sabit parametreli otoregressif hareketli ortalama modelini kurmak için, öncelikle $x_{v,\tau}^{(i)}$ tarihi serisinin normal dağılıma uyup uymadığı kontrol edilerek, eğer gerekli ise uygun bir dönüşümle normal dağılmış $y_{v,\tau}^{(i)}$ serisine dönüştürülür. Periyodik ortalamalar ve periyodik standart sapmalar hesaplanır ve standardize $z_{v,\tau}^{(i)}$ serisi elde edilir. Bu noktadan itibaren $z_{v,\tau}^{(i)}$ serisi $z_{v,\tau}^{(i)}(t = (v-1)w + \tau)$ şeklinde ele alınır ve modelleme işlemi tıpkı yıllık bir serinin modellenmesi şeklinde devam eder. Model kurulduktan ve sentetik $z_{v,\tau}^{(i)}$ serileri üretildikten sonra seriden uzaklaştırıldıktan periyodik karakteristikler tekrar seriye kazandırılarak sentetik $y_{v,\tau}^{(i)}$ serileri, eğer bir dönüşüm uygulanmış ise ters dönüşüm ile sentetik $x_{v,\tau}^{(i)}$ serileri elde edilir. Daha sonra sentetik serilerden hareketle, tarihi karakteristiklerin güven aralıkları hesaplanarak, modelin tarihi seriyi temsil edip etmediği kontrol edilir. İstendiği takdirde sentetik serilerden hareketle model parametrelerinin güven aralıklarını da bulmak mümkündür.

### Araştırma Sonuçları

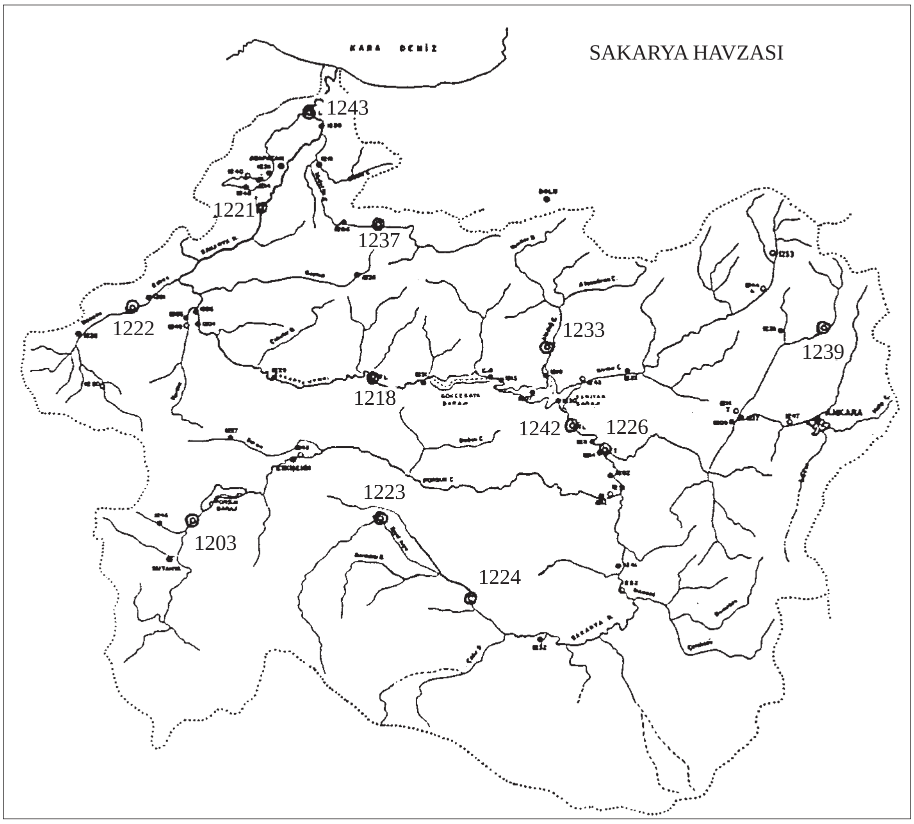
Bu bölümde Sakarya Havzasında yer alan (Şekil 2) 1203, 1218, 1221, 1222, 1223, 1224, 1226, 1233, 1237, 1239, 1242 ve 1243 numaralı akım gözlem istasyonlarında ölçülen aylık akımların çok değişkenli stokastik modeli kurulacaktır. Akım kayıtları EİE akım gözlem yıllıklarından alınmış olup 1966-1990 yıllarını kapsamaktadır.

### Çok değişkenli otoregressif modelleme

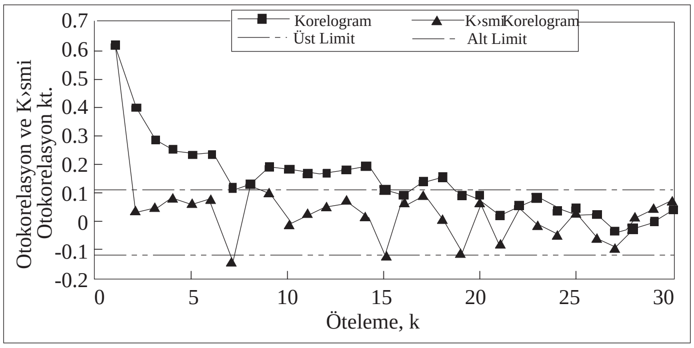
İlk olarak herbir istasyon için aylık akımların ortalama çarpıklıkları hesaplamış ve Snecedor ve Cohran tarafından önerilen limitleri (Salas ve ark, 1980) aşıp aşmadığı kontrol edilmiştir. Bu kontrol sonucunda 1222, 1223, 1226, 1233 ve 1239 numaralı istasyonlarda ait akım kayıtlarının limit değerlerini aşan bir çarpıklığa sahip olduğu görülmüş ve $y_t = ln(x_t)$ dönüşümü ile bu serilerin ortalama çarpıklığı kabul edilebilir seviyeye indirilmiştir. Daha sonra normal dağılıma uyan herbir $y_{v,\tau}^{(i)}(i = 1, \ldots, 12)$ serisi için periyodik ortalamalar ve standart sapmalar hesaplanarak standardize $z_t^{(i)}(i = 1, \ldots, 12)$ serisi elde edilmiştir. $z_t^{(i)}$ serisi için korelogramlar, kısmi korelogramlar ve bunlara ait %95 güven limitleri hesaplanarak, sonuçlar en düşük, orta ve en yüksek kotlara sahip istasyonlar olan 1243 (8 m), 1233 (512 m) ve 1239 (1033 m) nolu istasyonlar için Şekil 3'te sunulmuştur. Korelogramlara ve kısmi korelogramlara ait güven limitleri pratik olması için $\pm 2/\sqrt{N} = \pm 2/\sqrt{300} = \pm 0.115 (N = 12 \times 25 = 300)$ olarak alınmıştır (Salas ve ark, 1980). Korelogramlardan serilerin önemli bir zaman bağımlılığına sahip olduğu görülmektedir. Kısmi korelogramların genellikle k=1 öteleme değerinde önemli çıkması sebebiyle ilk olarak AR(1) modelinin seçilmesi uygun bulunmuştur.

Bu çalışmaya konu olan 12 adet zaman serisinin (istasyon) çapraz korelasyon yapısını oluşturmak için sıfır ve bir ötelemelerdeki çapraz korelasyon katsayıları olan $r_k^{ij}$ değerleri hesaplanmış ve burada verilmeyen $\hat{M}_0$ ve $\hat{M}_1$ korelasyon matrisleri oluşturulmuştur. Seçilen model AR(1) olduğu için $\hat{A}_1$ matrisi ve $\hat{B}\hat{B}^T$ çarpımı hesaplanmıştır. $\hat{B}\hat{B}^T$ çarpımından hareketle $\hat{B}$ matrisi elde edilmiştir. $\hat{A}_1$ ve $\hat{B}$ matrislerinin elemanları Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir.

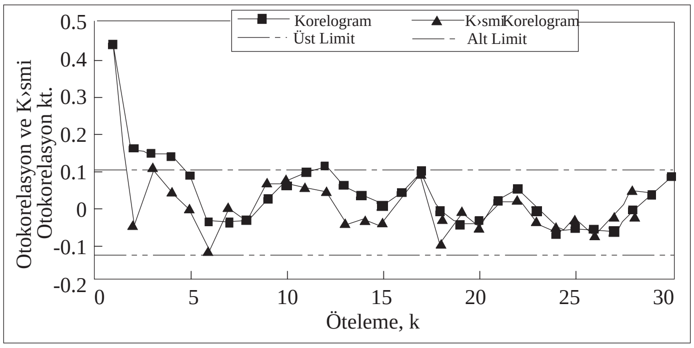
Model parametrelerinin hesabından sonra artık serilerin bağımsızlığı yönündeki model varsayımının model tarafından sağlanıp sağlanmadığı kontrol etmek amacıyla ilk olarak (1) denkleminden faydalanarak $\underline{\varepsilon}_t$ artık serileri ve bu serilerin sıfır ötelemedeki çapraz korelasyon katsayıları olan $r_0^{ij}$ değerleri hesaplanmış ve burada verilmeyen $\hat{M}_0(\varepsilon)$ matrisi oluşturulmuştur. Bu matristeki değerlere ait % 95 güven limitleri $\pm 1.96/\sqrt{300} = \pm 0.115$ şeklinde belirlenmiştir. İlgili tablonun birden farklı elemanlarından sadece $r_0^{92} = 0.135$ ile verilen elemanın güven aralığının dışına çıktığı görülmektedir. Bu ise kabul edilebilir bir durumdur, çünkü $\alpha$=0.05 önem seviyesi ile çalışıldığı için 0.05×144∼8 adet eleman güven aralıklarının dışına çıkabilir. $r_0^{ii} (i = 1, \ldots, 12)$ terimleri daima bire eşit olduğundan (her seri kendisi ile eşleşmektedir) $\hat{M}_0(\varepsilon)$ matrisinin diyagonal elemanlarının bire eşit olduğuna dikkat edilmelidir.



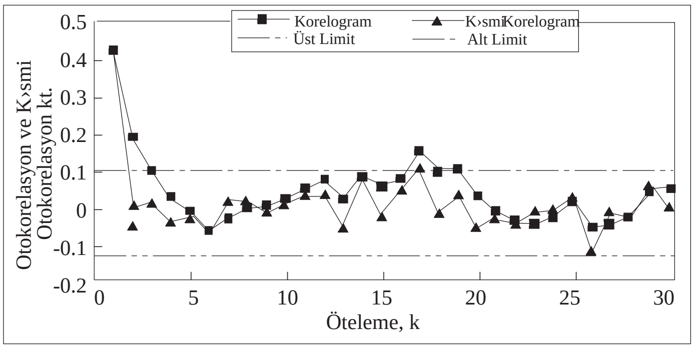

**Şekil 2.** Sakarya Havzası ve araştırmaya konu olan akım gözlem istasyonları




(a)




(b)




(c)

**Şekil 3.** a) 1243, b) 1233, c) 1239 nolu istasyonların korelogramları, kısmi korelogramları ve %95 güven limitleri

Artık serilerin uzayda bağımsız olduğunun görülmesinden sonra, artık serilerin zamanda bağımlılığını gösteren $r_k^{ii}$ otokorelasyon katsayıları ve bunlara ait güven limitleri hesaplanmıştır. Bu kontrollerin sonucunda hem $r_0^{ii}$ hem de $r_k^{ii}$ değerlerinin genellikle kendilerine ait güven aralıklarının içinde kaldığı gözlenerek artık serilerin hem zamanda hem de uzayda önemli bir bağımlılığının olmadığı sonucuna varılmıştır.

Artık serilerin bağımsızlığı yönündeki model varsayımlarının kontrolünden sonra (10) denklemini kullanarak 50 adet sentetik standardize $z_t^i(i = 1, \ldots, 12)$ serisi üretilmiş; daha sonra, önceki aşamalarda seriden uzaklaştırılan periyodik karakteristikler $y_{v,t} = z_{v,t}\sigma_\tau + \mu_\tau$ formülü ile seriye tekrar kazandırılarak ve dönüşüme uğramış istasyonlar için ters dönüşüm gerçekleştirilerek sentetik periyodik $x_{v,t}^{(i)}$ serileri elde edilmiştir. Üretilen sentetik serilerin tarihi seriye ait karakteristikleri koruyup korumadığını kontrol etmek için ilk olarak tarihi $x_{v,t}^{(i)}$ serisine ait $\hat{M}_0$ matrisi, daha sonra herbir sentetik seri için $\hat{M}_0$ matrisleri hesaplanmış ve tarihi seriye ait $\hat{M}_0$ matrisinin tüm elemanları için güven aralıkları oluşturulmuştur. Tarihi seriye ait $\hat{M}_0$ matrisi Tablo 3'te verilmiştir. Aynı tablo üzerinde $\hat{M}_0$ matrisinin güven aralıklarının dışına çıkan elemanları koyu italik olarak belirtilmiştir. Tablo 3'ten $\hat{M}_0$ matrisinin elemanlarının sık sık güven aralıklarının dışına çıktığı görülmektedir. Bu, kurulan çok değişkenli AR(1) modelinin tarihi serinin sıfır ötelemedeki karşılıklı korelasyon yapısını korumadığını göstermektedir. Bu durumda diğer karakteristiklerin kontrolüne gerek duyulmadan başka bir modelin denenmesine karar verilmiştir.

**Tablo 1.** $\hat{A}_1$ matrisinin elemanları

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.207 | 0.185 | -0.033 | 0.135 | -0.090 | 0.039 | -0.137 | 0.025 | 0.082 | 0.129 | 0.057 | 0.137 |
| 2 | -0.002 | 0.749 | 0.089 | 0.024 | -0.070 | -0.079 | -0.053 | -0.051 | -0.098 | 0.150 | 0.100 | 0.021 |
| 3 | -0.217 | 0.009 | 0.240 | 0.193 | -0.058 | 0.078 | -0.065 | 0.004 | 0.026 | 0.566 | -0.093 | -0.060 |
| 4 | -0.267 | -0.123 | 0.058 | 0.705 | -0.168 | 0.009 | -0.049 | 0.115 | 0.090 | 0.236 | -0.018 | 0.168 |
| 5 | 0.093 | -0.027 | 0.046 | 0.292 | 0.078 | -0.059 | 0.007 | -0.001 | 0.0656 | -0.014 | 0.035 | 0.180 |
| 6 | 0.049 | 0.141 | 0.010 | -0.039 | -0.104 | 0.694 | -0.095 | -0.057 | -0.006 | 0.192 | -0.068 | -0.027 |
| 7 | -0.186 | 0.070 | 0.052 | 0.044 | -0.025 | -0.126 | 0.650 | 0.018 | -0.049 | 0.279 | 0.005 | 0.076 |
| 8 | -0.123 | 0.036 | -0.049 | -0.010 | -0.010 | 0.007 | -0.008 | 0.554 | 0.036 | 0.162 | 0.074 | 0.162 |
| 9 | -0.188 | 0.019 | 0.130 | 0.181 | -0.122 | -0.006 | 0.124 | -0.057 | 0.446 | 0.388 | -0.074 | -0.050 |
| 10 | -0.293 | 0.172 | -0.013 | 0.075 | -0.099 | 0.032 | -0.093 | -0.001 | 0.087 | 0.613 | 0.115 | 0.175 |
| 11 | -0.338 | 0.193 | 0.028 | 0.062 | -0.055 | -0.061 | -0.022 | 0.024 | -0.041 | 0.477 | 0.525 | 0.043 |
| 12 | -0.143 | 0.160 | 0.001 | 0.013 | -0.116 | -0.031 | -0.147 | 0.014 | -0.024 | 0.249 | 0.216 | 0.399 |

**Tablo 2.** $\hat{B}$ matrisinin elemanları (AR(1) modeli için)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.759 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.241 | 0.533 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.250 | 0.277 | 0.758 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.364 | 0.125 | 0.212 | 0.579 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.371 | 0.245 | 0.396 | 0.170 | 0.548 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.263 | 0.300 | 0.176 | 0.032 | 0.028 | 0.425 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.175 | 0.298 | 0.021 | 0.023 | 0.054 | -0.061 | 0.469 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.175 | 0.234 | 0.095 | 0.008 | 0.047 | 0.052 | 0.214 | 0.538 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.341 | 0.136 | 0.199 | 0.195 | 0.118 | -0.021 | 0.044 | 0.069 | 0.558 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.647 | 0.015 | -0.042 | -0.095 | -0.045 | -0.041 | 0.021 | 0.000 | 0.046 | 0.238 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.221 | 0.254 | 0.057 | 0.096 | 0.014 | -0.016 | 0.135 | 0.114 | 0.026 | 0.056 | 0.393 | 0.000 |
| 12 | 0.565 | -0.009 | -0.082 | -0.191 | -0.045 | -0.018 | 0.022 | -0.007 | -0.191 | 0.231 | -0.001 | 0.336 |

**Tablo 3.** Tarihi $x_t^{(i)}$ serisine ait $\hat{M}_0$ çapraz korelasyon matrisi

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | **0.866** | 0.733 | **0.819** | **0.793** | **0.825** | 0.778 | **0.764** | **0.859** | **0.960** | 0.852 | **0.769** |
| 2 | **0.866** | 1.000 | 0.730 | 0.703 | 0.739 | **0.925** | **0.840** | **0.817** | 0.750 | **0.892** | **0.880** | 0.742 |
| 3 | 0.733 | 0.730 | 1.000 | **0.803** | **0.909** | **0.801** | 0.618 | 0.683 | 0.772 | 0.685 | 0.728 | 0.466 |
| 4 | **0.819** | 0.703 | **0.803** | 1.000 | **0.881** | 0.759 | 0.629 | 0.695 | 0.870 | 0.721 | 0.779 | 0.421 |
| 5 | **0.793** | 0.739 | **0.909** | **0.881** | 1.000 | 0.803 | **0.667** | **0.732** | **0.825** | **0.714** | **774** | 0.475 |
| 6 | **0.825** | **0.925** | **0.801** | 0.759 | 0.803 | 1.000 | **0.727** | **0.784** | 0.743 | **0.833** | **0.854** | **0.668** |
| 7 | 0.778 | **0.840** | 0.618 | 0.629 | **0.667** | **0.727** | 1.000 | **0.890** | **0.723** | 0.791 | 0.860 | 0.624 |
| 8 | **0.764** | **0.817** | 0.683 | 0.695 | **0.732** | **0.784** | **0.890** | 1.000 | **0.761** | **0.740** | **0.907** | 0.539 |
| 9 | **0.859** | 0.750 | 0.772 | 0.870 | **0.825** | 0.743 | **0.723** | **0.761** | 1.000 | **0.763** | **0.808** | 0.427 |
| 10 | **0.960** | **0.892** | 0.685 | 0.721 | **0.714** | **0.833** | 0.791 | **0.740** | **0.763** | 1.000 | **0.847** | **0.879** |
| 11 | 0.852 | **0.880** | 0.728 | 0.779 | **0.774** | **0.854** | 0.860 | **0.907** | **0.808** | **0.847** | 1.000 | 0.649 |
| 12 | **0.769** | 0.742 | 0.466 | 0.421 | 0.475 | **0.668** | 0.624 | 0.539 | 0.427 | **0.879** | 0.649 | 1.000 |

**Çok Değişkenli Otoregressif-Hareketli Ortalama Modeli**

Şekil 3'te verilen korelogramlardan standardize $z_t^{(i)}$ serisinin genellikle uzun dönemli bir zaman bağımlılığı olduğu gözlenmektedir. Bu durumda ikinci alternatif olarak modelleme işleminin ARMA(p,q) otoregressif-hareketli ortalama modeli ile yapılması uygun bulunmuştur. Çünkü ARMA modelleri, AR modellerine nazaran daha uzun dönemli bir zaman bağımlılığını benzetebilir. Özellikle nehir akımlarının modellenmesi hususunda yaygın bir kullanıma sahip olması sebebiyle ilk olarak ARMA(1,1) modeli denenecektir.

$z_t^{(i)}(i = 1, \ldots 12)$ serisinin ARMA(1,1) modelinin kurulması için ilk olarak serinin (14) ifadesiyle verilen zaman bağımlılığının modellenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, herbir i serisi veya istasyon için, artık serilerin kareleri toplamını minimum yapan $(\phi, \theta)$ parametre çifti Microsoft Excel 5.0 bilgisayar yazılımı ile elde edilmiştir (Karabörk, 1997). Herbir istasyon için hesaplanan $\phi, \theta$ ve $\sigma_\varepsilon$ (artık serilerin standart sapması) parametreleri Tablo 4'te verilmiştir.

$z_t^{(i)}$ serisinin zamansal bağımlılığının modellenmesinden sonra, serinin uzaysal bağımlılığının modellenmesi için ilk olarak (15) ifadesi ile herbir istasyon için $\varepsilon_t^{(i)}(i = 1, \ldots, 12)$ artık seriler ve standardize $\varepsilon_t'^{(i)}$ serisi hesaplanmıştır. $\varepsilon_t'^{(i)}$ serisine ait sıfır ötelemedeki çapraz korelasyon matrisi $(\hat{M}_0(\varepsilon'))$ oluşturulmuş ve $\hat{B}\hat{B}^T = \hat{M}_0(\varepsilon)$ eşitliğinden hareketle $\hat{B}$ matrisi elde edilmiştir (Tablo 5).

**Tablo 4.** $z_t^{(i)}(i = 1, \ldots, 12)$ serisine ait $\phi, \theta$ ve $\sigma_\varepsilon$ parametreleri

| **İstasyon Numarası** | $\phi$ | $\theta$ | $\sigma_\varepsilon$ |
|---|---|---|---|
| 1203 | 0.744 | 0.215 | 0.766 |
| 1218 | 0.908 | 0.341 | 0.581 |
| 1221 | 0.742 | 0.120 | 0.716 |
| 1222 | 0.675 | 0.076 | 0.763 |
| 1223 | 0.013 | -0.071 | 1.022 |
| 1224 | 0.914 | 0.378 | 0.593 |
| 1226 | 0.726 | -0.101 | 0.626 |
| 1233 | 0.317 | -0.157 | 0.877 |
| 1237 | 0.593 | -0.100 | 0.743 |
| 1239 | 0.471 | 0.048 | 0.885 |
| 1242 | 0.786 | -0.026 | 0.597 |
| 1243 | 0.928 | 0.491 | 0.610 |

**Tablo 5.** $\hat{B}$ matrisinin elemanları (ARMA(1,1) modeli için)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.200 | 0.980 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.345 | 0.788 | 0.510 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 4 | 0.459 | -0.048 | 0.384 | 0.800 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 5 | 0.182 | -0.068 | -0.014 | 0.033 | 0.980 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.562 | 0.073 | 0.058 | 0.085 | -0.117 | 0.809 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 7 | 0.474 | 0.134 | 0.091 | 0.170 | -0.027 | 0.064 | 0.846 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 8 | 0.434 | 0.147 | 0.167 | 0.364 | -0.053 | 0.092 | 0.204 | 0.760 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 9 | 0.451 | 0.026 | 0.286 | 0.282 | -0.083 | -0.011 | 0.168 | 0.286 | 0.719 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 10 | 0.383 | 0.090 | 0.110 | 0.258 | -0.060 | 0.041 | 0.325 | 0.395 | 0.013 | 0.706 | 0.000 | 0.000 |
| 11 | 0.564 | 0.119 | 0.110 | 0.140 | -0.083 | 0.288 | 0.364 | -0.005 | -0.044 | -0.053 | 0.640 | 0.000 |
| 12 | 0.374 | 0.685 | 0.507 | 0.138 | -0.016 | -0.030 | 0.063 | 0.066 | 0.111 | -0.028 | -0.019 | 0.303 |

$\hat{B}$ matrisinin hesabından sonra $\chi_t^{(i)}$ serisi elde edilmiştir. $\chi_t^{(i)}$ serisinin zamansal ve uzaysal bağımlılığının olmadığı yönündeki model varsayımının kontrolü için, ilk olarak bu seriye ait sıfır ötelemedeki çapraz korelasyon katsayıları olan $r_0^{ij}$ değerleri ve bu değerlere ait güven aralıkları ($\pm 1.96/\sqrt{300} = \pm 0.115$) hesaplanarak serinin uzaysal bağımlılığının kontrolü yapılmıştır. $\chi_t^{(i)}$ serisine ait sıfır ötelemedeki çapraz korelasyon katsayılarından oluşan çapraz korelasyon matrisinin ($\hat{M}_0(\chi)$) elemanları hesaplanmıştır. Matristeki birden farklı elemanların, sıfıra gerçekten çok yakın oldukları ve güven aralığının içine düştükleri görülmüştür. $\chi_t^{(i)}$ serisine ait otokorelasyon katsayıları ($r_k^{ij}$) ve bu değerlere ait güven aralıkları da herbir istasyon için ayrı ayrı hesaplanarak korelogramlar çizilmiş (yer darlığından burada verilmemiştir) ve serinin önemli bir zamansal bağımlılığı olmadığı gözlenmiştir.

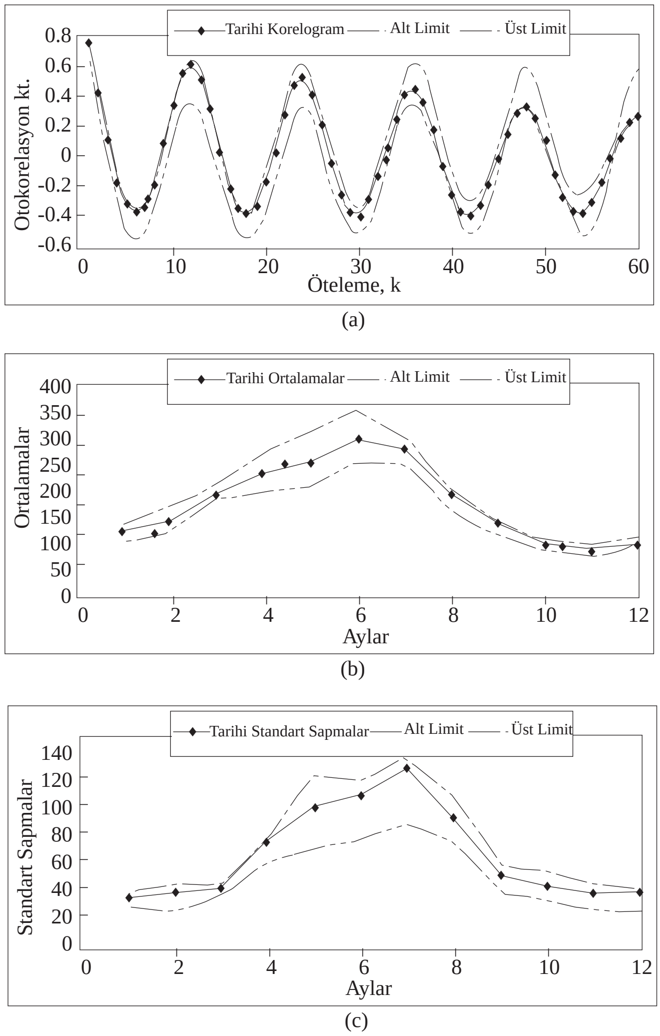
Modele ait parametreler belirlendikten ve model varsayımlarının sağlandığı görüldükten sonra, kurulan çok değişkenli ARMA(1,1) ile daha önce verilen prosedüre uygun şekilde, 20 (bu rakamın 50 olmamasının sebebi iş hacminin fazlalığındandır) sentetik standardize $z_t^{(i)}(i = 1, \ldots, 12)$ serisi üretilmiş; daha sonra, önceki aşamalarda seriden uzaklaştıktan periyoik karakteristikler seriye tekrar kazandırılarak, sentetik periyodik $x_{v,t}^{(i)}$ serileri elde edilmiştir. Üretilen sentetik serilerin, tarihi seriye ait karakteristikleri koruyup korumadığını kontrolü için, ilk olarak, her birçok değişkenli sentetik seriye ait standardize $\varepsilon_t'^{(i)}$ artık serileri, daha sonra da bu serilere ait $r_0^{ij}$ çapraz korelasyon katsayıları hesaplanmıştır. Bu katsayılardan hareketle, herbir sentetik seri için, artık serilerin sıfır ötelemedeki çapraz korelasyon matrisleri hesaplanmıştır. Bu matrislerden faydalanarak, tarihi $\varepsilon_t'^{(i)}$ artık serilerine ait çapraz korelasyon matrisinin tüm elemanları için güven aralıkları hesaplanmıştır. Tarihi seriye ait $\varepsilon_t'^{(i)}$ artık serilerinin çapraz korelasyon matrisi Tablo 6'da verilmiştir. İlgili tablodan sadece dört adet elemanın güven aralıkları dışına çıktığı (koyu italik olarak gösterilmiştir) görülmektedir ki, $\alpha$=0.05 önem seviyesi için 144*=0.065~8 kez bu durum kabul edilebilir.

**Tablo 6.** Tarihi seriye ait $\varepsilon_t'^{(i)}$ artık serilerinin çapraz korelasyon matrisi

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 0.200 | 0.345 | 0.459 | 0.182 | 0.562 | **0.474** | 0.434 | 0.451 | **0.383** | 0.564 | 0.374 |
| 2 | 0.200 | 1.000 | 0.841 | 0.045 | -0.031 | 0.184 | 0.226 | 0.231 | 0.116 | 0.164 | 0.229 | 0.746 |
| 3 | 0.345 | 0.841 | 1.000 | 0.317 | 0.001 | 0.281 | 0.315 | 0.351 | 0.322 | 0.259 | 0.344 | 0.927 |
| 4 | 0.459 | 0.045 | 0.317 | 1.000 | 0.108 | 0.345 | 0.383 | 0.547 | 0.541 | 0.420 | 0.407 | 0.444 |
| 5 | 0.182 | -0.031 | 0.001 | 0.108 | 1.000 | -0.015 | 0.054 | 0.027 | 0.004 | 0.011 | 0.016 | 0.002 |
| 6 | 0.562 | 0.184 | 0.281 | 0.345 | -0.015 | 1.000 | 0.351 | 0.376 | 0.297 | 0.291 | 0.586 | 0.279 |
| 7 | **0.474** | 0.226 | 0.315 | 0.383 | 0.054 | 0.351 | 1.000 | 0.482 | 0.435 | 0.527 | 0.646 | 0.391 |
| 8 | 0.434 | 0.231 | 0.351 | 0.547 | 0.027 | 0.376 | 0.482 | 1.000 | 0.605 | 0.665 | 0.432 | 0.459 |
| 9 | 0.451 | 0.116 | 0.322 | 0.541 | 0.004 | 0.297 | 0.435 | 0.605 | 1.000 | 0.461 | 0.360 | 0.482 |
| 10 | **0.383** | 0.164 | 0.259 | 0.420 | 0.011 | 0.291 | 0.527 | 0.665 | 0.461 | 1.000 | 0.370 | 0.324 |
| 11 | 0.564 | 0.229 | 0.344 | 0.407 | 0.016 | 0.586 | 0.646 | 0.432 | 0.360 | 0.370 | 1.000 | 0.367 |
| 12 | 0.374 | 0.746 | 0.927 | 0.444 | 0.002 | 0.279 | 0.391 | 0.459 | 0.482 | 0.324 | 0.367 | 1.000 |

Kurulan modelin tarihi seriye ait zaman bağımlılığını ve ferdi karakteristikleri koruyup korumadığının kontrolü için, tarihi $x_{v,t}^{(i)}$ serisini oluşturan istasyonlara ait korelogramların, periyodik ortalamaların ve periyodik standart sapmaların güven aralıkları da hesaplanmış ve bu karakteristiklerin hesaplanan aralıkların içine düşüp düşmediği kontrol edilmiştir. Sonuçlar sırasıyla en düşük, orta ve en yüksek kotlara sahip istasyonlar olan 1243 (8 m), 1233 (512 m) ve 1239 (1033 m) nolu istasyonlar için Şekil 4-6'da grafik olarak sunulmuştur. Tüm şekillerin incelenmesinden, bütün istasyonlar için, tarihi ortalamaların ve tarihi standart sapmaların büyük çoğunluğunun kendilerine ait güven aralıklarının içine düştükleri anlaşılmıştır. 1239 ve 1223 nolu istasyonların ortalama ve standart sapmalarına ait güven aralıklarının alt limitlerinin, bazı aylar için negatif değerler aldıkları görülmektedir. Ortalama ve standart sapma negatif olamayacağı için, söz konusu aylara ait bu karakteristiklerin güven aralıklarının alt limitleri sıfıra eşit kabul edilmektedir. Söz konusu aylar için böyle bir durumla karşılaşılmasının nedeni, standart sapmanın ortalamaya nisbetle büyük ve dağılımın sağa çarpık

($\gamma > 0$) olmasıdır. 1239 ve 1223 nolu istasyonlara ait tarihi serilerin dağılımları da sağa çarpık olduğundan bu sonuç normal karşılanmıştır.




**Şekil 4.** 1243 nolu istasyona ait a) korelogram, b) ortalamalar, c) standart sapmalar ve %95 güven aralıkları

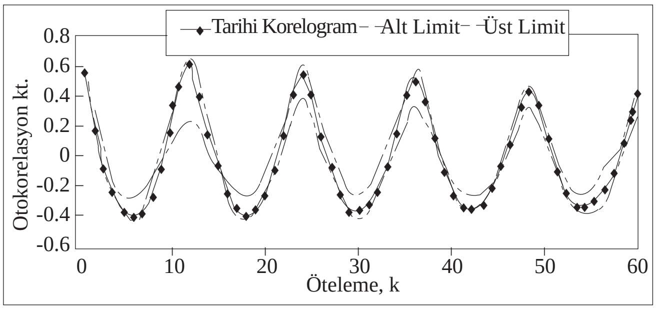
1218 ve 1223 nolu istasyonlara ait korelogramların, sıkça güven aralığının dışına çıktığı görülmektedir. Herhangi bir karakteristiğin güven aralıklarının dışına çıkması durumunda, sonucun ne derece önemli olduğu konusundaki karar, araştırmacının bilgi ve tecrübesiyle, sentetik serilerin üretilmesindeki amaca bağlı olarak değişir. 1203 ve 1223 nolu istasyonların korelogramları, güven aralıklarını sıkça aşmakta ama aşma miktarı büyük bir oran olmamaktadır. Bütün istasyonlar için ortalama ve standart sapma gibi iki önemli karakteristiğin, istasyonların bütünü için çapraz korelasyon yapısının ve ikisi hariç tüm istasyonlar için içsel bağımlılık yapısının tam olarak korunması nedeniyle model başarılıdır ve üretilen sentetik seriler çeşitli araştırmalarda kullanılabilir. Bununla beraber, araştırılan konunun özelliğine bağlı olarak, serilerin içsel bağımlılık yapısının tam olarak korunması istenirse, 1203 ve 1223 nolu istasyonlarına ait sentetik seriler kullanılmadan, geriye kalan on adet istasyondan oluşan sentetik $x_{v,t}^{(i)}(i = 1, \ldots, 10)$ serileriyle araştırmalar gerçekleştirilebilir.

## Sonuç

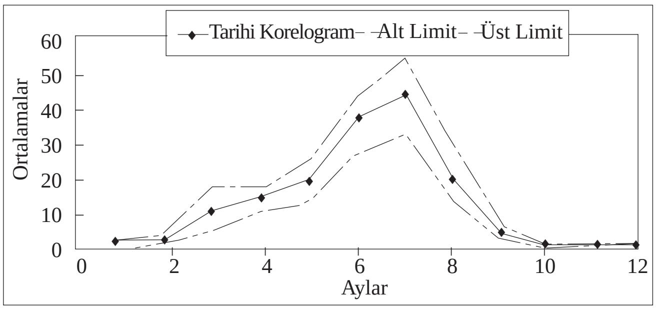
Bu çalışmada, çok değişkenli zaman serilerini modellenmesinde yaygın kullanımları olan çok değişkenli otoregressif (AR) ve çok değişkenli otoregressif-hareketli ortalama (ARMA) modelleri ele alınmıştır. Söz konusu modellerin metodolojilerinin, hem yıllık hem de aylık seriler için ayrıntılı bir tanıtımdan sonra, Sakarya Havzası'ndaki 12 adet akım gözlem istasyonunda ölçülen aylık akımların çok değişkenli periyodik stokastik modelleri kurulmuştur.

Seçilen istasyonlar için yapılan ön analiz sonucunda, modellemenin, ilk olarak birinci dereceden çok değişkenli otoregressif model olan AR(1) ile yapılması uygun görülmüştür. Kurulan model ile üretilen sentetik serilerin çapraz korelasyon yapılarının incelenmesinin sonucunda, modelin tarihi seriye ait çapraz korelasyon yapısını korunmadığı görülerek model başarısız bulunmuştur.

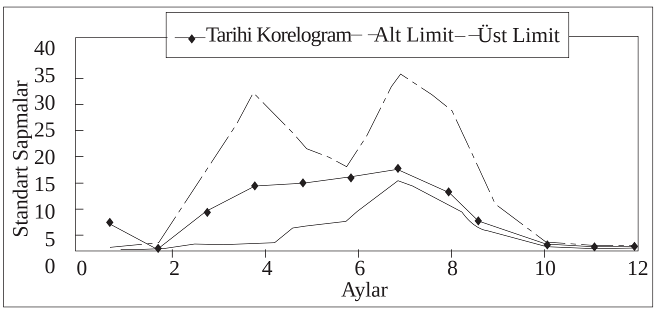
Ön analiz aşamasında elde edilen korelogramlardan, tarihi serinin, uzun dönemli bir zaman bağımlılığı olduğu görülmektedir. ARMA modelleri, AR modellerine nazaran daha uzun dönemli bir hafızayı benzetebildikleri için; ikinci alternatif olarak, modellemenin çok değişkenli otoregressif-hareketli ortalama (ARMA) modelleri ile yapılması uygun görülmüş ve modelleme ARMA(1,1) modeli ile gerçekleşmektedir. Bu model ile üretilen sentetik serilerin istatistiksel karakteristikleri üzerinde yapılan incelemenin sonucunda, kurulan çok değişkenli periyodik ARMA(1,1) modelinin, tarihil serilerin hem ayrı ayrı istatistiksel özelliklerini, hem de ortak çapraz korelasyon yapısını koruduğu görülmüş ve model başarılı bulunmuştur.




(a)

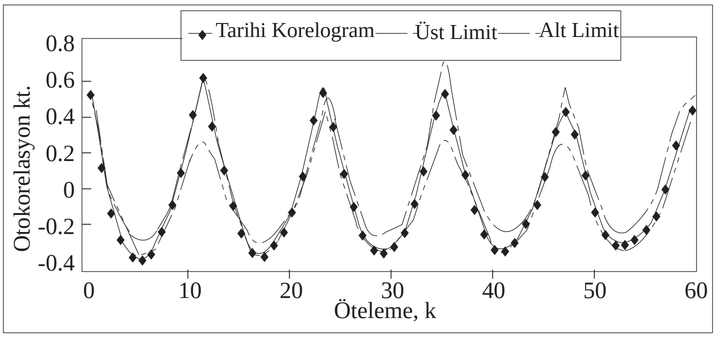



(b)

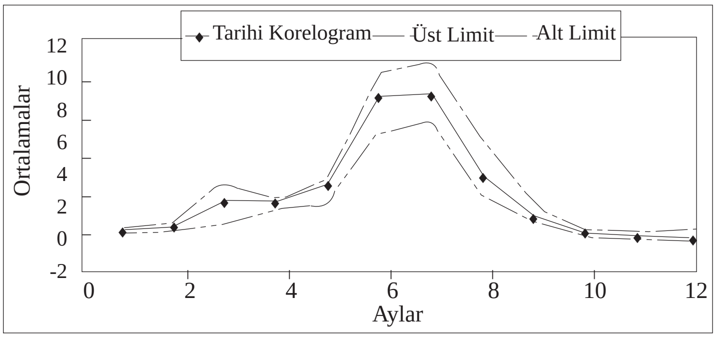



(c)

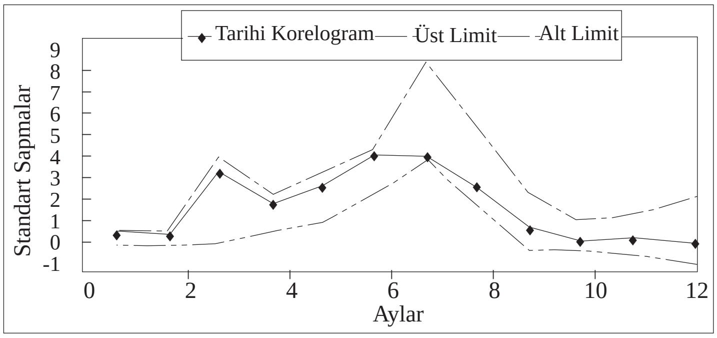
**Şekil 5.** 1233 nolu istasyona ait a) korelogram, b) ortalamalar, c) standart sapmalar ve %95 güven aralıkları




(a)




(b)




(c)

**Şekil 6.** 1239 nolu istasyona ait a) korelogram, b) ortalamalar, c) standart sapmalar ve %95 güven aralıkları

## Simgeler

| | |
|---|---|
| $A^{-1}$ | A matrisinin tersi |
| $A^T$ | A matrisinin transpozu |
| X, x | Orijinal data |
| $\bar{x}, \bar{y}$ | Ortalama |
| $x_t^{(i)}$ | Tek değişkenli seri |
| $X_t$ | Çok değişkenli seri |
| Y, y | Normal dağılıma uyan data |
| Z, z | Standardize olmuş data |
| $\sigma^2, s^2$ | Varyans |
| $\varepsilon_t, \chi_t$ | Stokastik bileşen ya da bağımsız seri |
| $\phi_j$ | Otoregressif katsayı |
| $\phi_k(k)$ | Kısmi otokorelasyon fonksiyonu |
| $\sigma, s$ | Standart sapma |

$r_k$ otokorelasyon katsayısı

Not: Bu çalışmada popülasyon parametreleri ile bunların eldeki örnekten tahmin edilen değerleri "$\hat{}$" notasyonu ile birbirlerinden ayrılmıştır ($\phi, \hat{\phi}; \sigma, \hat{\sigma}$ gibi).

## Kaynaklar


Box, G. E. P., and Jenkins, G. M., "Time Series Analysis, Forecasting and Control", Holden-Day, San Francisco, 1970.

Haan, T. C., "Statistical Methods in Hydrology", The lowa State University Press, Ames, 1977.

Karabörk, Ç., "Yıllık ve Aylık Akımların Stokastik Modellemisi", Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 1997.

Karabörk, Ç., and Kahya E., "Göksu Nehrinin Yıllık ve Aylık Akımlarının Stokastik Modellemesi", S. Ü. Mühendislik-Mimarlık Dergisi, Hakem İncelenmesinde, 1998.

Loucks, D. P., Stedinger, J. R., Haith, D. A., "Water Resource Systems Planning and Analysis", Prentice-Hall, N. J., 1981.

Matalas, N. C., "Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology", Wateru Resources Research, Vol 3, No.4, 937-945, 1967.

Mejia, J. M., Iturbe, I. R. and Cordova, J. R., "Multivariate Generation of Mixtures of Normal and Log Normal Variables", Water Resources Research, Vol. 10, No. 4, 691-693, 1974.

Pegram, G. G. S. and James, W., "Multilag Multivariate Autoregressive Model for the Generation of Operational Hydrology", Water Resources Research, Vol. 8, No. 4, 1074-1076, 1972.

Salas, J. D., and Pegram, G. G. S., "A Seasonal Multivariate Multilag Autoregressive Model in Hydrology", Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, 1978.

Salas, J. D., Delleur J. W., Yevjevich V., and Lane W. ., "Applied Modelling of Hydrologic Time Series", Water Resources Publications, Colorado, 1980.

Valencia, R. D., and Schaake, J. C., "Disaggregation Processes in Stochastic Hydrology", Water Resources Research, Vol. 9, No. 3, 580-585, 1973.