

Pompa Çarkı İçindeki Akışın 3 Boyutlu Euler Denklemleri ile Analizi

Kemal SARIOĞLU, Erkan AYDER
İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü
İstanbul-TÜRKİYE

Geliş Tarihi 24.03.1997

Özet

Çark içindeki akış yapısının ve değişik tasarım büyüklüklerinin akış yapısına etkilerinin bilinmesi daha iyi performansa sahip pompa çarklarının tasarımını mümkün kılar.

Bu çalışmada radyal pompa çarkı içerisindeki akış yapısı, korunumlu formda yazılmış 3 boyutlu, sıkıştırılmaz, zamana bağlı Euler denklemlerinin sayısal çözümü ile belirlenmektedir. Denklemleri zaman boyutunda ilerleme tekniğini kullanarak çözebilmek için yapay sıkıştırılabilirlik tekniği kullanılmıştır. Uzay boyutunda denklemlerin ayrıklaştırılması için sonlu hacimler tekniği kullanılmıştır. Zaman boyutundaki ayrıklaştırma 4 adımlı Runge-Kutta metodu ile yapılmıştır. Yöntem endüstriyel bir pompa çarkından elde edilen deneysel verilerle sınanmıştır. Sayısal modelin çark performansını belirlemede kullanılabilmesi gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Santrifüj Pompa, 3 Boyutlu Euler Denklemleri, Sonlu Hacimler Tekniği, Çark Performansı

Numerical Calculation of the Flow Inside Pump Impellers Using 3D Euler Equations

Abstract

The flow pattern inside an impeller should be determined for maximum efficiency and performance. The effects of the design parameters on the pump performance can be determined using numerical calculations instead of empirical equations.

Incompressible 3D time-dependent Euler equations, written in a conservative form, are used. An artificial pressure term is added to preserve the hyperbolic character of the equations. A finite-volume technique is used for space discretization. A fourth-order Runge-Kutta time-stepping scheme is used for time discretization. A steady-state solution is achieved using time-marching technique. An industrial pump impeller with known experimental data was used to calculate the flow in the impeller. The comparison of the calculated and measured data reveals that the use of these calculations enables the prediction of impeller performance.

Key Words: Centrifugal Pump, 3D Euler Equations, Finite-Volume Technique, Impeller Performance

Giriş

Santrifüj pompa çarkının tasarımı genellikle temel tasarım kitaplarında bulunan ampirik denklemlerle yapılır (Kovats; Desmur, 1994). Çark veriminin iyileştirilmesi ve istenen performansın

sağlanması pompa tasarımcısının tecrübesine bağlıdır (Balje, 1981). Tasarım aşamasında genellikle iki temel kriter mevcuttur. İstenen çalışma noktasında en iyi verimi elde etmek için kanat açısının

değişimi ve meridyenel geometri belirlenmelidir (Stepanoff, 1957). Tasarımcı elde ettiği çark geometrisinin performansı hakkında deney yapmadan fikir sahibi olamaz. Tasarımcının bu tecrübesinin yerini son yıllarda sayısal akışkanlar dinamiği hesaplamaları almıştır ve bunların çoğu akış analizi ile ilgilidir. İstenen performansı sağlayacak çark geometrisini tasarlayan yöntemlerde son yıllarda önem kazanmıştır (AGARD-LS-195).

Pratik açıdan bakıldığında tasarlanan çark geometrisinin tasarım noktası dışındaki çalışma noktalarındaki performansı da önemlidir. Ayrıca çark geometrisinin üretilebilme imkanı ve çalışma esnasında oluşabilecek mekanik problemler de gözönünde bulundurulmalıdır.

Bu çalışmada ana amaç pompa tasarımcısının elde ettiği çarkın performansının, çarkın imal edilmesi ve deneysel olarak performansının belirlenmesi yerine bir bilgisayar programının çalıştırılması ile belirlenmesidir. Bu zaman ve paradan tasarruf sağlayacaktır. Analiz programının vermiş olduğu sonuçlardan yola çıkılarak kanat geometrisi üzerinde belirli değişiklikler kolaylıkla yapılır ve istenen performans elde edilir.

Elde edilen sayısal sonuçların (hız vektörleri, basınç dağılımları v.b.) değerlendirilerek geometride yapılması gereken değişiklikler Tuzson (1993) tarafından açıklanmaktadır. Tuzson (1993) de belirtildiği gibi, sonuçların kanat performansını en iyi açıklayan emme ve basma yüzeylerindeki açıl momentum dağılımları şeklinde verilmesidir.

Sayısal Yöntem

Pompa çarkı içindeki akışın sayısal olarak çözümlenebilmesi için akış ile ilgili fiziksel özelliklerin tesbit edilmesi gerekir. Sürtünmesiz, çevrili akışkan hareketlerini tanımlayan Euler denklemleri, Navier-Stokes denklemleri yerine çark performansını elde etmede kullanılabilir (AGARD-AG-325). Akışkan olarak su kullanıldığından akış sıkıştırılmaz kabul edilebilir. Literatürde zamana bağlı sıkıştırılabilir Euler denklemlerinin çözümü ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur.

Chorin (1967) tarafından önerilen ve daha sonra Rizzi (1985) tarafından geliştirilen yapay sıkıştırılabilirlik tekniği sıkıştırılabilir akış için kullanılan sayısal tekniklerin sıkıştırılmaz akış için kullanılmasına imkan verir. Sıkıştırılmaz akışta akışkan yoğunluğu sabit olduğundan süreklilik denkleminde zamana bağlı terim yoktur. Bu teknikte zamana bağlı Euler denklemlerinin hiperbolik karak-

terini korumak için zamana bağlı yapay basınç terimi süreklilik denklemine eklenir. Daimi haldeki çözüm amaçlandığından daimi hale ulaşıldığında bu terim sıfır olur.

Zamana bağlı 3 boyutlu sıkıştırılmaz Euler denklemleri korunumlu formda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{f}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{g}) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{h}) + \vec{b} = 0(1)$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} p/\rho_0 \\ W_r \\ W_\theta \\ W_z \end{bmatrix} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} c^2 W_r \\ W_r^2 + p/\rho_0 \\ W_r W_\theta \\ W_r W_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} c^2 W_\theta \\ W_r W_\theta \\ W_\theta^2 + p/\rho_0 \\ W_\theta W_z \end{bmatrix} \quad \vec{h} = \begin{bmatrix} c^2 W_z \\ W_r W_z \\ W_\theta W_z \\ W_z^2 + p/\rho_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -W_\theta^2/r - p/\rho_0 r - r\Omega^2 - 2\Omega W_\theta \\ W_r W_\theta/r + 2\Omega W_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tüm fiziksel büyüklükler giriş koşulları $\bar{p}_0, \bar{\rho}_0$ ve çark çıkış yarıçapı \bar{L}_0 ile boyutsuzlandırılmıştır.

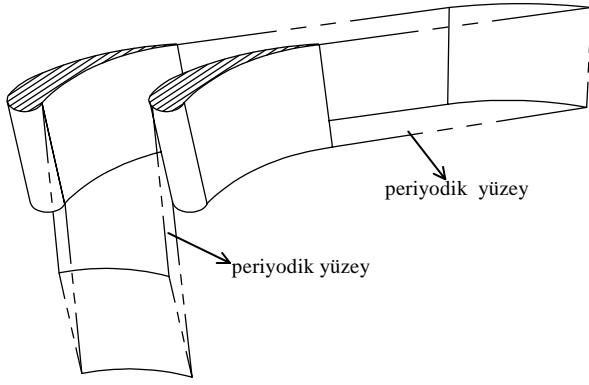
$$l = \frac{\bar{l}}{\bar{L}_0} \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}} \quad \sqrt{p/\rho_0} \quad p = \frac{\bar{p}}{\bar{P}_0} \quad (2)$$

$$\rho = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \quad W_{r,\theta,z} = \frac{W_{r,\theta,z}}{\sqrt{\bar{p}/\bar{\rho}_0}}$$

Yukarıdaki denklemlerde \vec{u} çözüm vektörünü; $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ ise akı vektörlerini göstermektedir. c^2 terimi çözümün daimi hale ulaşmasını sağlayacak sabit bir sayıdır. Bu denklemlerde hızın silindirik koordinatları bileşenleri (W_r, W_θ, W_z) ve basınç (p) hesaplanacak fiziksel büyüklüklerdir.

Çözüm Ağı

Teknik resmi mevcut çark geometrisinin meridyenel ve ön görünüş düzlemlerinden kanat geometrisini tanımlayan koordinatlar (r, θ, z) almır. Bu koordinatlar kullanılarak kanatlar arasındaki bölgede düzgün yapılı çözüm ağı oluşturulur. Kanat giriş ve çıkışındaki mevcut çözüm ağı noktaları süreklilik ve serbest dönme denklemleri kullanılarak elde edilir. Çözüm bölgesi Şekil 1 de gösterilmiştir.



Şekil 1. Çözüm Bölgesi

Denklemlerin Ayrıklaştırılması

Denklemlerin uzay boyutunda ayrıklaştırılması için sonlu hacimler tekniği kullanılmıştır (Jameson, 1981). Bu teknikte çözüm bölgesi belirli sayıda kontrol hacimlerine bölünür ve kontrol hacimlerinin yüzeyleri boyunca korunum denklemleri sağlanılmaya çalışılır. Ayrıklaştırma neticesinde denklemler en genel halde aşağıdaki hale gelir.

$$\sum_{m=1}^6 \vec{f}_m S_{m_r} + \sum_{m=1}^6 \vec{g}_m S_{m_\theta} + \sum_{m=1}^6 \vec{h}_m S_{m_z} = - \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{b} \right) V \quad (3)$$

Yukarıdaki denklemde $S_{m_r}, S_{m_\theta}, S_{m_z}$ değerleri hacim elemanın yüzeyleri boyunca r, θ ve z yönündeki izdüşüm alanlarını göstermektedir.

(1) nolu denklem sisteminin çözülebilmesi için herhangi bir kontrol hacmi için izdüşüm alanları ve kontrol hacminin hesaplanması gerekir (Arts, 1985).

Bu çalışmada 8 tetrahedral elemandan oluşan kontrol hacmi kullanılmıştır (Şekil 2). Çözülecek fiziksel büyüklükler (çözüm vektörünün bileşenleri) kontrol hacminin köşelerinde (hücre kenarlı yaklaşım) hesaplanmıştır. Bu yaklaşım katı yüzeylerdeki statik basınç değerlerinin herhangi bir dönüşüm yapmadan hesaplanmasına olanak verir. Hacim elemanını oluşturan yüzeylerden geçen akı vektörleri ise çözüm vektörünü oluşturan bileşenlerin aritmetik ortalaması alınarak hesaplanmıştır.

Sonlu hacimler tekniği ile yapılan ayrıklaştırma neticesinde adi diferansiyel denklem sistemi haline gelen denklemlerin daimi haldeki çözümü amaçlandığından çok adımlı açık yöntem kullanılmıştır. Açık yöntemin anlamı, bulunulan zaman

adımındaki bilinmeyen bir önceki zaman adımında hesaplanan büyüklükler cinsinden hesaplanmasıdır. Bu çalışmada 4 adımlı Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Q artık operatörünü, D ise sönümleme operatörünü göstermek üzere bu yöntem aşağıdaki gibi gösterilir.

$$V_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial t} U_{ijk} \right) + Q_{ijk} - D_{ijk} = 0 \quad (4)$$

$$\vec{u}^{(0)} = \vec{u}^n$$

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(0)} - \alpha_1 \Delta t \vec{P}(\vec{u}^{(0)})$$

$$\vec{u}^{(2)} = \vec{u}^{(0)} - \alpha_2 \Delta t \vec{P}(\vec{u}^{(1)})$$

$$\vec{u}^{(3)} = \vec{u}^{(0)} - \alpha_3 \Delta t \vec{P}(\vec{u}^{(2)})$$

$$\vec{u}^{(4)} = \vec{u}^{(0)} - \alpha_4 \Delta t \vec{P}(\vec{u}^{(3)})$$

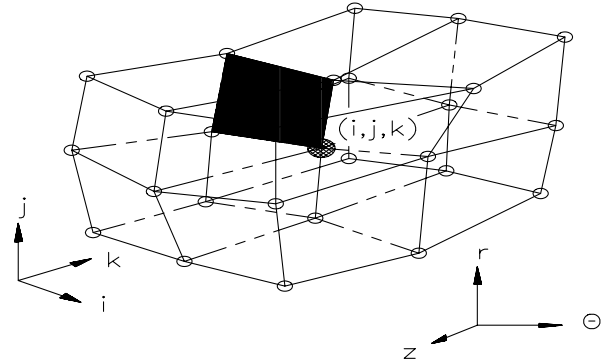
$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{(4)}$$

$$\vec{P}(\vec{u}^1) = \vec{Q}(\vec{u}^1) + \vec{D}(\vec{u}^1)$$

$$\alpha_1 = 1/4 \quad \alpha_2 = 1/3 \quad \alpha_3 = 1/2$$

$$\alpha_4 = 1$$

Sönümleme terimleri sadece ilk adımda hesaplandığı için bu yöntem ara değerlerin depolanmasını gerektirmez ve hesaplama zamanını kısaltır.



Şekil 2. Sekiz tetrahedral elemandan oluşan kontrol hacmi

Sınır Koşulları

3 boyutlu Euler denklemlerinin matematiksel doğruluğu sınır koşullarının doğru tanımlanması ile mümkündür. Verilen sınır koşulları çözülecek denklem sisteminin tipine bağlıdır. Sınırdaki verilecek fiziksel değişkenlerin sayısı sisteminin yayılma özelliklerine bağlıdır (Thompson, 1990).

Çözüm bölgesinin giriş kısmında çözüm bölgesinden içeriye doğru 3 karakteristik eğri mevcuttur. Bu yüzden hızın ekstenel bileşeni W_z ve bu

hızın θ ve r yönleriyle yapmış olduğu akış açıları verilir. Çözüm vektörünü oluşturan dördüncü bilinmeyen (p) ise iç bölgeden enterpolasyonla hesaplanır.

Çıkış bölgesinde ise çözüm bölgesinden içeriye doğru tek karakteristik eğri mevcuttur. Bu yüzden tek bir fiziksel sınır koşulu yeterlidir ve oldukça sık kullanılan statik basınç değeri kullanılmıştır.

Çözümü yapılacak akış bölgesi belirli sayıda kanatlardan oluştuğu için periyodik sınır koşullarının verilmesi gerekir. Bu koşulların uygulanması ile çözüm sadece iki kanat arasında gerçekleştirilir. Periyodik yüzeyler boyunca akı vektörlerinin eşitliği sağlanmıştır.

Ayrıca katı yüzeyler boyunca duvara dik hız bileşeninin sıfır olması sağlanmıştır.

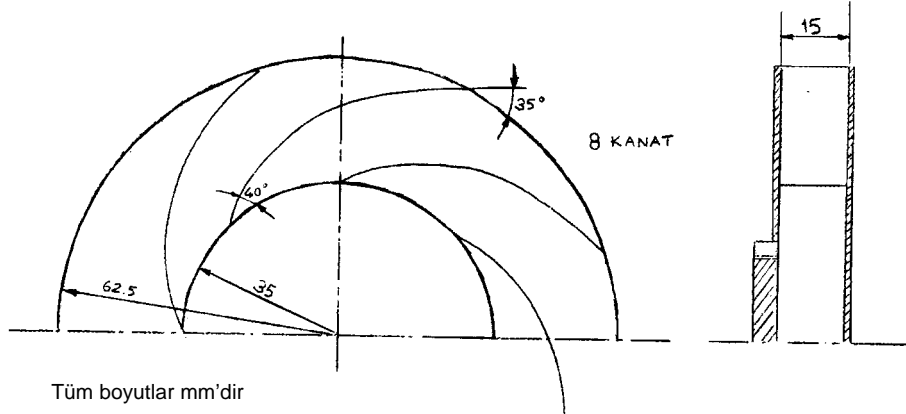
Kararlılık ve Yapay Sönümleme

Zaman boyutunda denklemlerin çözümü zaman adımında ilerleme tekniğine dayanır. Yani bir sonraki zaman adımında bir önceki zaman adımında hesaplanan değerler kullanılır. İki zaman adımı arasında hesaplanan değerler arasındaki fark, bilgisayar doğruluğundan küçükse daimi haldeki çözüme ulaşılmış olur. Fakat bu teknikte zaman adımı gelişigüzel seçilemez. Aksi takdirde çözüm yöntemi kararsızdır.

Kararlılık için her bir zaman adımı boyunca çözüm ağındaki her bir nokta için aşağıdaki kriter sağlanmalıdır (Eriksson, 1984).

$$\Delta t_{ij} \leq CFL \left[\frac{\text{Kontrol Hacmi}}{[\bar{U} + (\bar{U}^2 + c^2 S^2)^{1/2}]_{ij}} \right] \quad (5)$$

$$c^2 = \max(0.3, r\vec{W} \cdot \vec{W}) \quad 1 \leq r \leq 5$$



Şekil 3. Endüstriyel pompa kanat geometrisi

\tilde{U} değerinin tanımı Rizzi (1985) den alınmıştır.

Euler denklemlerinin çözümünde çözüm içerisinde oluşan dalgalanmalar yapay sönümleme terimleri eklenmezse çözümün iraksamasına sebep olur. Literatürde sıkça kullanılan Jameson tarafından önerilmiş 4. mertebeden farklar şeklinde yazılan yapay sönümleme terimleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\bar{D}_{i,j,k} = d_{i+\frac{1}{2},j,k} - d_{i,j-\frac{1}{2},k} + d_{i,j+\frac{1}{2},k} - d_{i,j-\frac{1}{2},k} \quad (6)$$

Sönümleme operatörü $d_{i+\frac{1}{2},j,k}$ aşağıda gösterilmiştir.

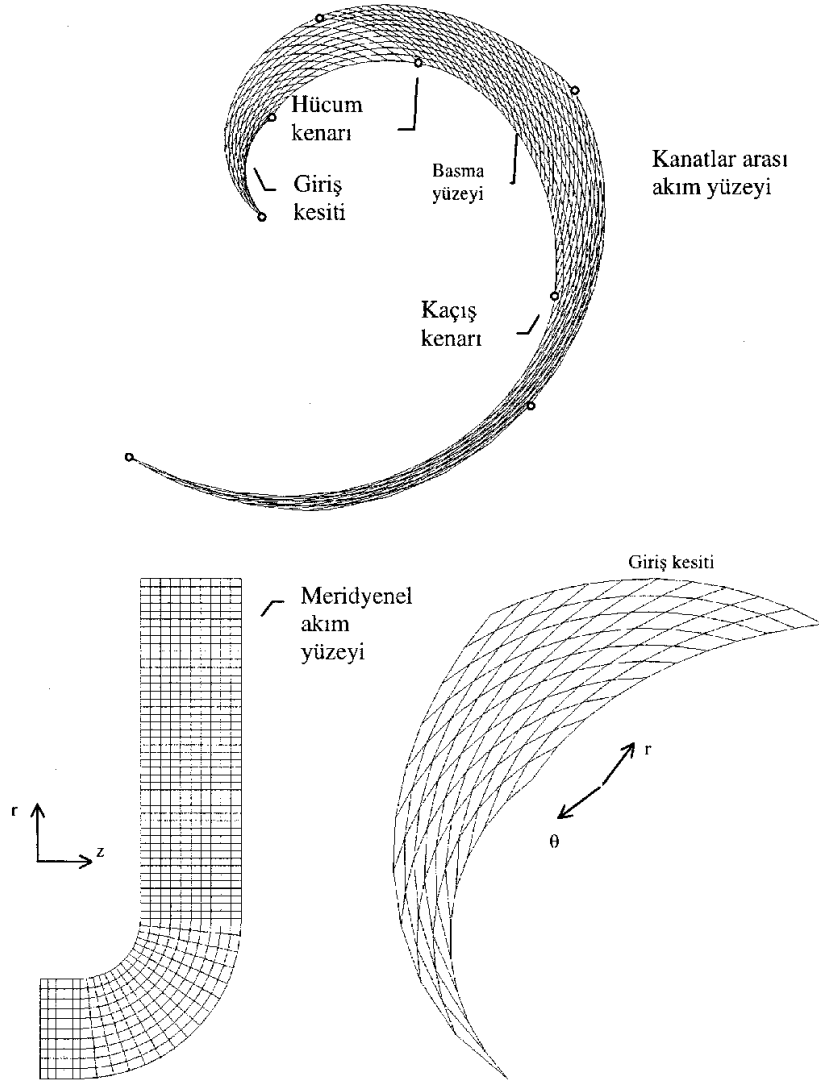
$$d_{i+\frac{1}{2},j,k} = k^{(4)}(\bar{u}_{i+2,j,k} - 3\bar{u}_{i+1,j,k} + 3\bar{u}_{i,j,k} - \bar{u}_{i-1,j,k}) \quad (7)$$

$k^{(4)}$ katsayısı 4. mertebeden farkları uyarlayan bir katsayıdır.

Sayısal Örnek

Geliştirilen 3 boyutlu akış analizi programı ile çark sayısal performansının elde edilmesi için endüstriyel bir pompa çarkındaki akış çözümlenmiştir (Sarioğlu, 1997). Bu çarka ait deneysel performans eğrisi endüstriyel bir pompadan sağlanmıştır.

Çarka ait kanat geometrisi Şekil 3 de görülmektedir. Meridyenel akım tübü genişliği kanat girişinden çıkışına kadar sabittir. Tasarım debisinde elde edilen çözüm ağı ise farklı düzlemlerde Şekil 4 de gösterilmiştir. Çözüm ağındaki nokta sayısı $11 \times 11 \times 65$ dir. Akış çarka aksel olarak girmektedir.

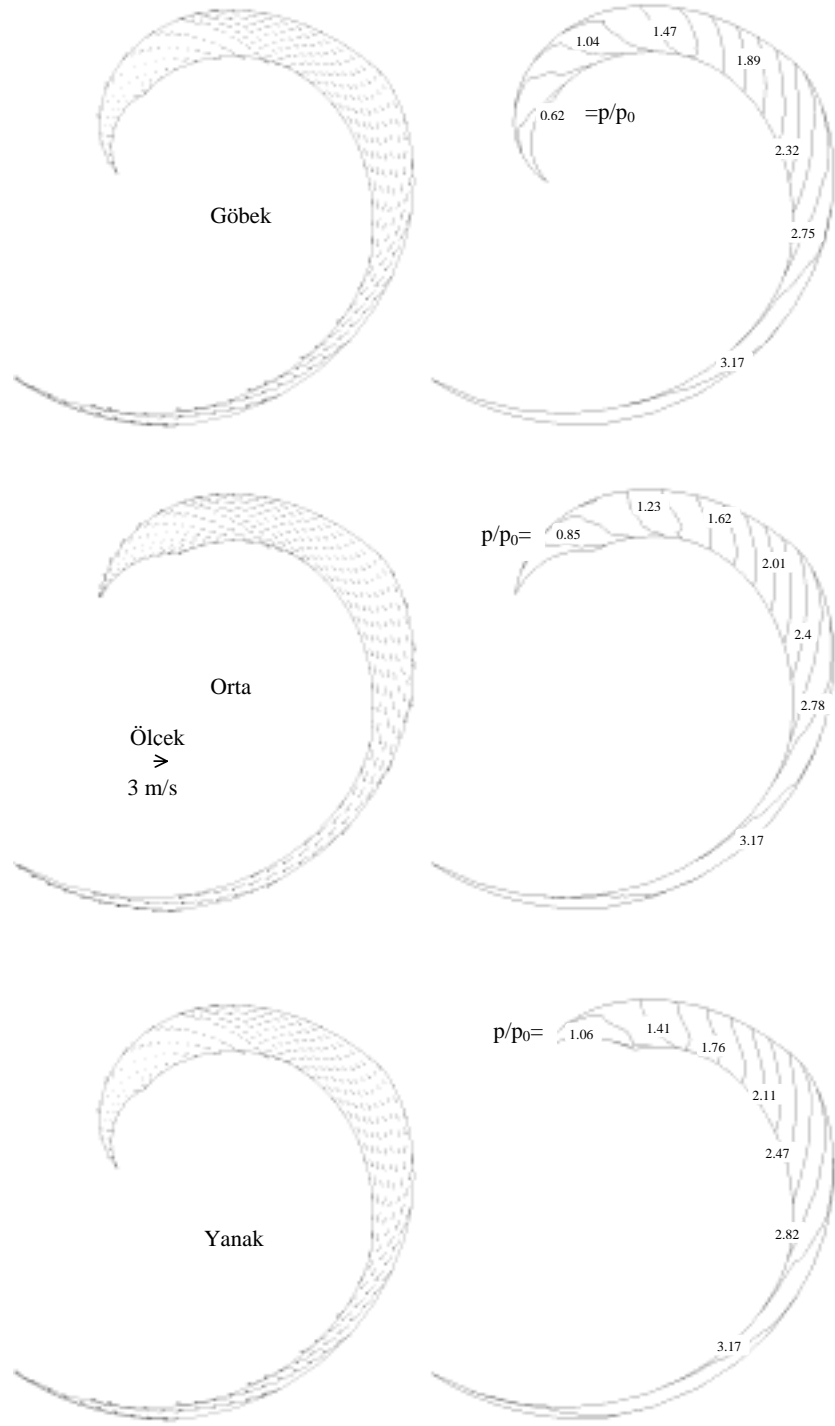


Şekil 4. Çözüm ağı (11x11x65) (r, θ, z)

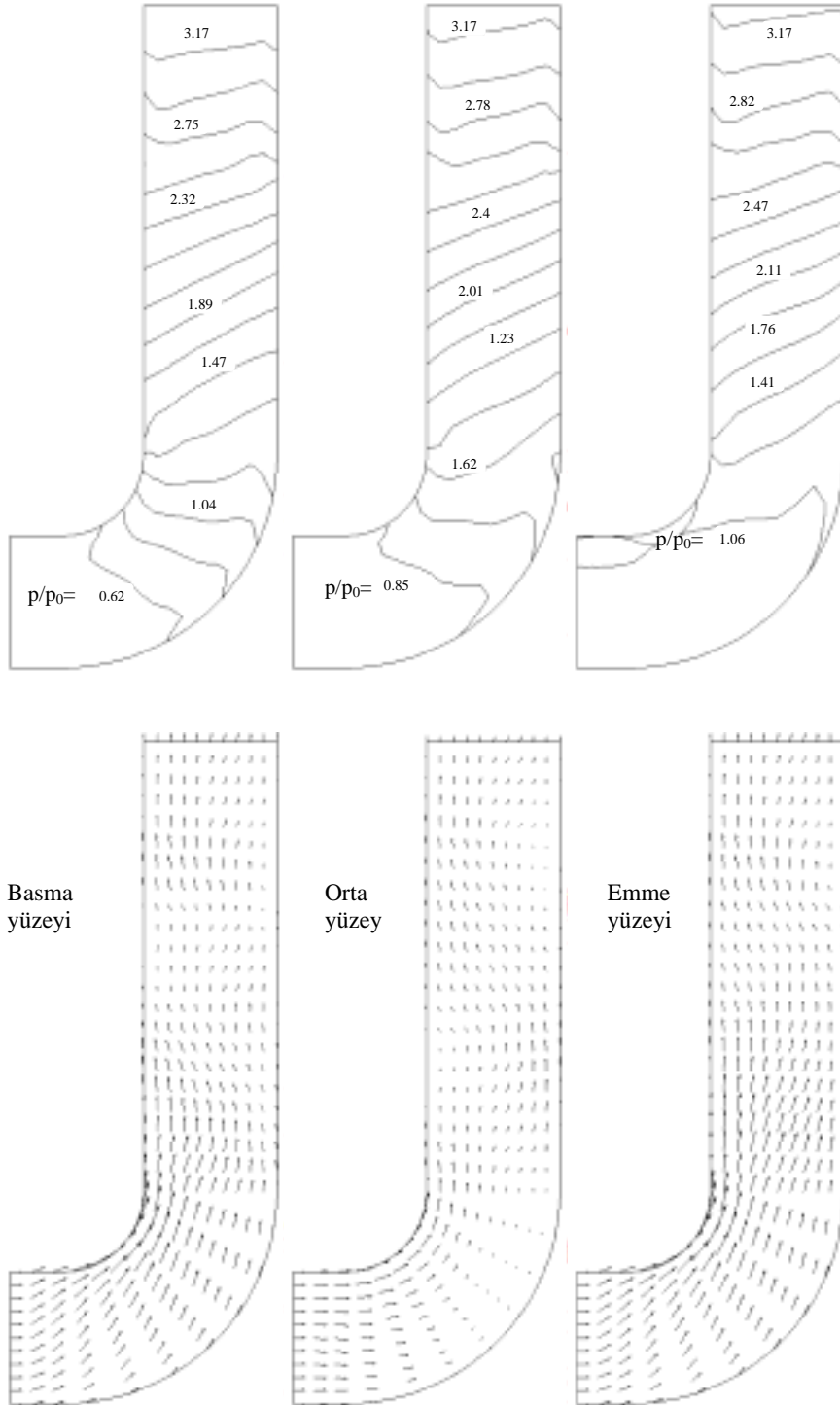
Tasarım debisinde sayısal olarak elde edilen (kanatlar arası düzlem) göbek, yanak ve orta kesitlerde hız vektörleri ve eş statik basınç eğrileri Şekil 5 de görülmektedir. Çark girişinden çıkışına doğru statik basınç göbek, yanak ve orta düzlemlerde artmaktadır. Ayrıca göbekten yanağa boyutsuz statik basınç mertebeleri karşılaştırıldığında yanak kesitindeki statik basınç değerleri beklenildiği gibi daha yüksek mertebededir. Sayısal olarak yanak kesitindeki hız vektörlerine bakıldığında çark içindeki akış yapısı hemen hemen iki boyutlu olduğundan yanak kesiti üzerindeki akış yapısında ard-iz bölgesi yoktur. Ayrıca emme, basma ve orta meridyenel

akım yüzeylerindeki hız vektörleri ve eş statik basınç eğrileri Şekil 6 da verilmiştir. Orta meridyenel akım yüzeyinde akışın yanak kısmında bozulmaya meyilli olduğu gözlenmiştir. Farklı dik kesitlerdeki eş statik basınç eğrileri Şekil 7 de gösterilmiştir.

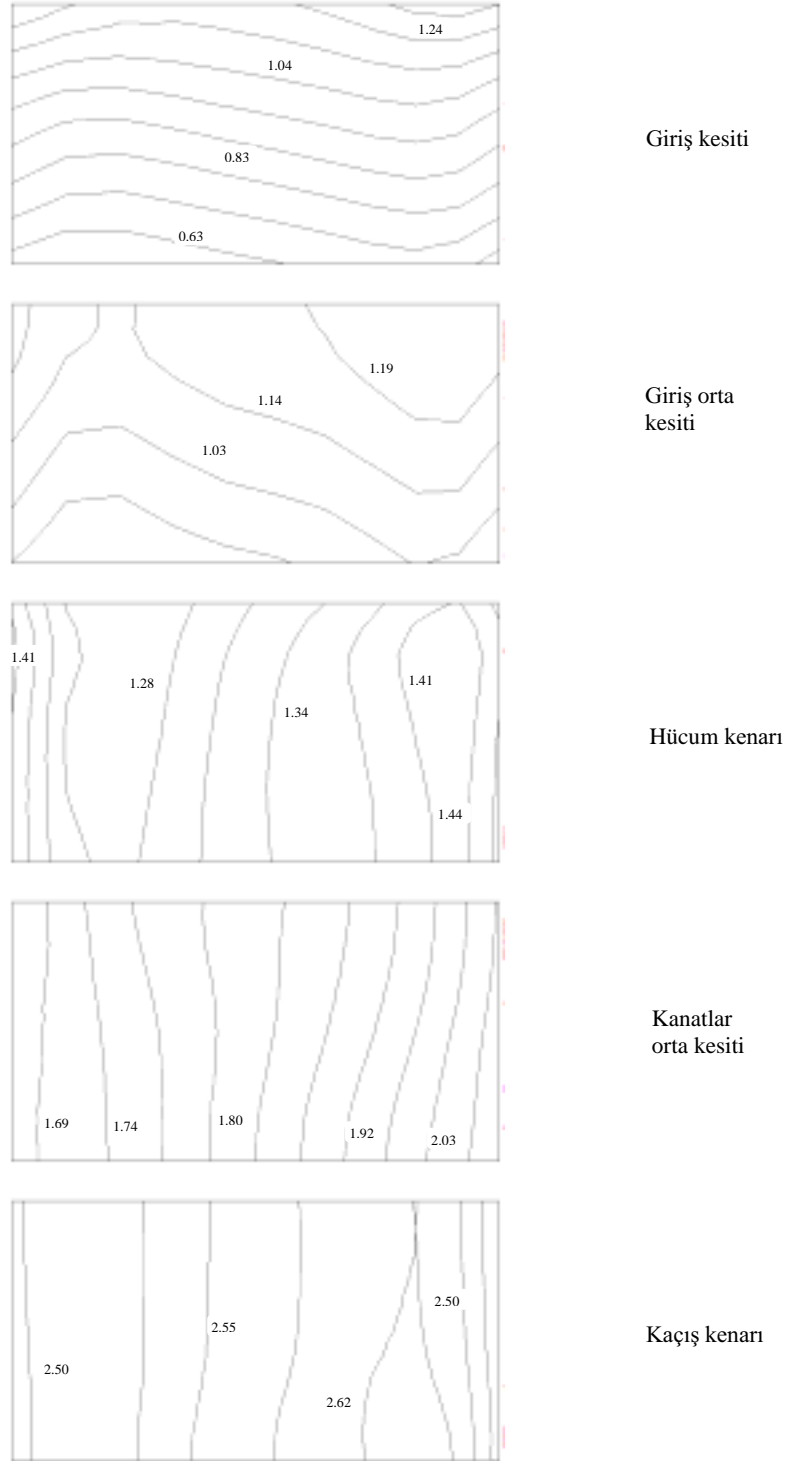
DeneySEL ve sayısal performans eğrileri Şekil 8 de karşılaştırılmıştır. Pentium 120 Mhz işlemcili bilgisayar kullanılarak elde edilen yakınsama zamanı yaklaşık 12 saattir. Fakat geliştirilen program ile çark performansı firma tarafından sağlanan performans eğrisiyle karşılaştırıldığında elde edilen sonuç cesaret vericidir.



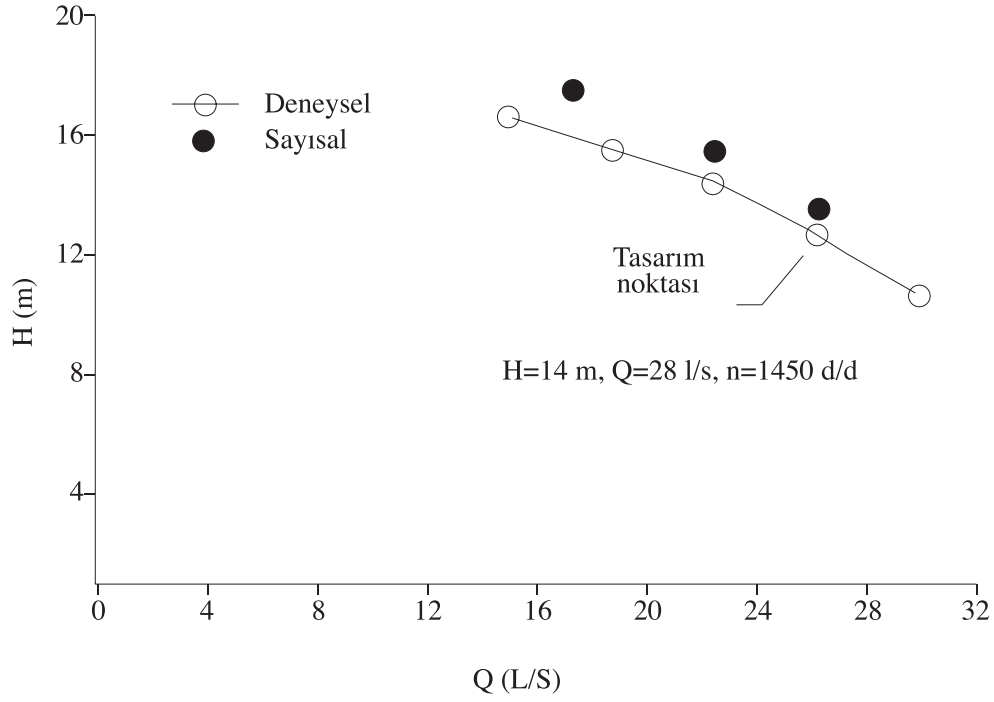
Şekil 5. Göbek, yanak ve orta kesitte sayısal olarak hesaplanmış hız vektörleri ve eş statik basınç eğrileri ($p_0 = 100$ kPA)



Şekil 6. Meridyenel kesitlerde sayısal olarak hesaplanmış hızı vektörleri ve eş statik basınç eğrileri.



Şekil 7. Çeşitli dik kesitlerdeki eş statik basınç eğrileri (p/p_0)



Şekil 8. Deneysel ve sayısal performans eğrilerinin karşılaştırılması

Sonuç

Radyal pompa kanatları arasındaki akışın sayısal olarak çözülmesi çark tasarımında oldukça büyük yararlar sağlar. Bu amaçla pompa çarkı içindeki akışın üç boyutlu rotasyonel Euler denklemleri kullanılarak modellenmesi yapılmış ve sayısal olarak çark performansı elde edilmiştir. Deneysel veriler ile yapılan karşılaştırma, geliştirilen yöntemin çark tasarımında kullanılabilirliğini göstermiştir.

Sembol Listesi

D	: Yapay sönümleme terimleri
L	: Referans uzaklık
Q	: Artık terimleri
S	: Alan
\vec{U}	: İzdüşüm alanları ile hız bileşenlerinin çarpımı
V	: Kontrol hacmi
W	: Bağlı hızı
CFL	: Courant-Friedrichs-Levy katsayısı
\vec{b}	: Kuvvet vektörü bileşeni
c^2	: Yapay sıkıştırılabilirlik sabiti

d	: Yapay sönümleme operatörü
$\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$: Akı vektörleri
$k^{(4)}$: 4.Mertebeden farklar için kullanılan yapay sönümleme katsayısı
p	: Statik basınç
r, θ, z	: Silindirik koordinatlar
t	: Zaman
\vec{u}	: Çözüm vektörü
ρ	: Yoğunluk
ρ_0	: Sabit yoğunluk
α_i	: Runge-Kutta yöntemindeki sabit katsayılar
Ω	: Açısal hız

Alt indisler:

0	: Giriş, referans
m	: Toplam indisi
r, θ, z	: Silindirik koordinatlar yönündeki bileşenler
i, j, k	: Tanım indisleri

Üst indisler:

-	: Boyutlu parametre
---	---------------------

Kaynaklar

- AGARD-LS-195, "Turbomachinery Design Using CFD", Ankara, 6-8 Haziran, 1994.
- AGARD-AG-325, "Computational Aerodynamics Based on the Euler Equations", Eylül, 1994.
- Arts, T., "Three Dimensional Rotational Inviscid Flow Calculation in Axial Turbine Blade Rows", VKI Technical Note 154, September 1985.
- Balje, O. E., "Three Dimensional Rotational Inviscid Flow Calculation in Axial Turbine Blade Rows", VKI Technical Note 154, September 1985.
- Chorin, A. J., "A Numerical Method for Solving incompressible Viscous Flow Problems", Journal of Com. Phys., 2, pp.12-26, 1967.
- Eriksson, L. E., Rizzi, A., "Numerical Solution of the Steady Incompressible Euler Equations Applied to Water Turbines", AIAA Paper. 84-2145, 1984.
- Jameson, A., Schmidt, W., Turkel, E., "Numerical Solution of the Euler Equations by a Finite Volume Method Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes", AIAA Paper 81-1259, 1981.
- Jameson, A., "A Non-Oscillatory Shock Capturing Scheme Using Flux limited Dissipation", Princeton University, MAE Report, # 1653.
- Kovats, A. de, Desmur, G. çev. Cahit Özgür, Hasan Fehmi Yazıcı, "Pompalar, Vantilatörler, Kompresörler", 3. baskı-İstanbul, İ.T.Ü., 1994.
- Rizzi, A., Eriksson, L. E., "Computation of Inviscid Incompressible Flow with Rotation", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 153, pp. 275-312, 1985.
- Sarioğlu, K., "Pompa Çarkları İçindeki akışın Sayısal Çözümlemesi", Doktora Tezi, İ.T.Ü. fen Bilimleri Enstitüsü, Mayıs 1997.
- Stepanoff, A., "Centrifugal and Axial Flow Pumps, Theory, Design and Application", John Wiley and Sons Inc., 2nd edition, 1957.
- Thompson, K. W., "Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, II", Journal of Comp. Phys., pp. 439-461, 1990.
- Tuzson, J., "Interpretation of Impeller Flow Calculations", J. Fluids Engineering, Vol. 115, pp. 463, 1993.