Tr. J. of Veterinary and Animal Sciences
22 (1998) 255-256

Vec ve Vech Operatörlarının Çok Değişkenli Karışık Boğa Modeline Uygulanması

M. Ziya FIRAT
Çukurova Üniversitesi, Ziraat Fakültesi, Zootekni Bölümü, Adana-TÜRKİYE

Geliş Tarihi : 24.07.1996

Özet : Vec operatörü bir X matrisinin sütunlarını tek bir sütun halinde birini diğerine yapıştırmaktan ibarettir. Kare bir X matrisinin vech operatörü vecX'in tanımlandığı gibi elde edilir, fakat her sütuna köşegen elemanından başlar. Bu makalenin amacı vec ve vech operatörlerini tanımlamak ve bunları çok değişkenli karışık boğa modeline uygulamaktır.

Anahtar Sözcükler: Vec ve vech operatörleri, karışık boğa modeli

Application of vec and vech Operators to a Multivariate Mixed Sire Model

Abstract: The vec operator of a matrix X consists of stacking columns of X one under another in a single vector. The vech operator of a square matrix X is obtained in the same way that vecX is defined, but it starts each column at its diagonal element. The objective of this paper is to describe vec and vech operators and apply them to a multivariate mixed sire model.

Key Words: Vec and vech operators, mixed sire model

Giriş

Son yıllarda, bir matrisin sütunlarından birini diğerinin altına yapıştırmak suretiyle tek bir vektör oluşturma işlemi araştırıcıların oldukça ilgisini çekmiştir. Bu işlem vec olarak bilinmektedir. Böylece, X r x c boyutlu X matrisinin c tane sütununu temsil eden x_i'ler i = 1,...,c için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$x = [x_1 x_2 \ldots x_c] \quad \text{ve vecX} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_c \end{bmatrix}$$

Bu işleme genellikle X'in sütun dizini olarak atfedilir ve vecX veya X_v (X'in sütunlarının vektörü) notasyonu ile gösterilir. Eğer X r x c boyutlu bir matris ise, vec X rc boyutlu bir vektördür (1). Bu makalede X_v notasyonu kullanılacaktır.

Searle (2) X_v'in bir uzantısı olan vechX operatörünü X_v'de olduğu gibi tanımlamıştır. Bunun X_v'den farklı tarafı, kare matris X'in her bir sütunundaki köşegen üzerinde veya altındaki elemanlar vechX'e (X'in 'yarım vektörü') dahil edilmiş olmasıdır. Bu yöntemde, simetrik X matrisi vechX sadece X'in farklı elemanlarını içermektedir.

Örneğin,

matrisi için
$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

$$\text{vecX} = [a\ b\ c\ b\ d\ e\ c\ e\ f]'$$

olduğu halde

$$\text{vechX} = [a\ b\ c\ d\ e\ f]$$

şeklinde yazılır. Henderson and Searle (3) bu operatörlerin tarihçesi özellikleri ve uygulamalarını detaylı bir biçimde vermişlerdir.

Bu operatörlerin hayvan ıslahına ilk uygulaması iki yönlü çok değişkenli bir modele Thompson (4) tarafından yapılmıştır. Bu model kullanılarak kalıtım dereceleri ve varyans kovaryans unsurları tahmin edilmiştir. vec operatörlerinin kullanımı oldukça büyük boyutlu matrislerle yapılacak hesaplamalardan ortaya çıkacak zaman kayıpları ortadan kaldıracağından, özellikle çok değişkenli modellere uygulanması hayvan ıslahında parametre tahminlerinin çok daha hızlı bir biçimde elde edilmesini sağlayacaktır. Fakat şimdiye kadar karışık çok değişkenli boğa modeline vec operatörlerinin uygulanması gerçekleşmemiştir.

Bu makalenin esas amacı karışık çok değişkenli boğa modelini tanıtmak ve bu modelin vektör operatörü ile nasıl ifade edileceğini teorik olarak incelemektir.

Doğrudan (Kronecker) Çarpımlar

Matrislerin çarpımının vec operatörü bu matrislerin doğrudan çarpımına yol açmaktadır. Sırasıyla p x q ve r x s boyutlu $A = \{a_{ij}\}$ ve B matrislerinin direk çarpımı pr x qs boyutlu $A \otimes B = \{a_{ij}B\}$ olarak tanımlanır (i = 1,...,p; j = 1,...,q). Doğrudan çarpımın en önemli özelliklerinden bazıları şunlardır (5).

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD, \quad (A\otimes B)' = A'\otimes B'$$

ve

$$|A_{pxp}\otimes B_{rxr}| = |A|^r |B|^P.$$

Doğrudan çarpım ve vec'in tanımından aşağıdaki sonuç elde edilir (6)

$$vec(ABC) = (C'\otimes A)vecB.$$

Bu sonuçtan kolaylıkla aşağıdaki elde edilebilir.

$$vec(AB)=(I\otimes A)vecB+(B'\otimes A)vecI=(B'\otimes I)vecA$$

Boğa Modeline vec'in Uygulanması

Boğa sayısının s ve her bir boğaya düşen yavru sayısının n_i (i=1,...,s) olduğunu varsayalım. Ayrıca t değişkenden elde edilen bilgiye sahip olduğumuzu ve Y'nin Nxt boyutlu gözlemleri temsil eden bir matris olduğunu varsayalım. Böylece karışık çok değişkenli boğa modeli aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Y = HA + CB + DS + E. \qquad [1]$$

Burada H, Nxg boyutlu sabit etkilere ait design matrisi, A, gxt boyutlu t değişkene ait sabit etkiler matrisi, C, Nxc boyutlu kovaryetlere ait değerleri içeren matris, B, cxt boyutlu kovaryetlerin regresyon katsayılarını içeren matris, D, Nxs boyutlu tesadüf etkilere ait design matrisi, S, sxt boyutlu t değişkene ait tesadüf etkiler matrisi ve E, Nxt boyutlu hata matrisidir.

[1] nolu eşitlikteki modeldeki Y, A, B, S ve E matrisleri vec operatörü kullanılarak vektör formunda ifade edilebilirler. Örneğin

$$y_v = vecY = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_t \end{bmatrix}$$

Aynı şekilde, eğer α_v, β_v, s_v ve e_v sırasıyla vecA, vecB, vecS ve vecE'yi temsil ediyorlarsa ve $\otimes$ doğrudan veya Kronecker çarpımı ifade ediyorsa, (1) nolu model vektör fromunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_v=(I_t\otimes H)\alpha_v+(I_t\otimes C)\beta_v+(I_t\otimes D)s_v+e_v, \qquad [2]$$

burada, I_t txt birim matrisidir. Bu modele ait varsayımlar şunlardır:

$$E(s_v) = 0, \quad E(e_v) = 0,$$

$$Var(s_v)=\Sigma_s\otimes I_s, \quad Var(e_v)=\Sigma_e\otimes I_N, \quad Cov(s_v,e_v)=0.$$

Böylece α_v, β_v, s_v ve Σ_s ve Σ_e verildiğinde y_v'nin dağılımı aşağıdaki gibi olur

$$y_v \sim N_{Nt}\left((I_t\otimes H)\alpha_v+(I_t\otimes C)\beta_v+(I_t\otimes D)s_v, \Sigma_e f I_N\right).$$

Burada Σ_s ve Σ_e sırasıyla txt boyutlu boğa ve hata varyans kovaryans matrisleridir.

Bu makalede, bütün değişkenler için aynı design matrislerinin uygulandığı varsayılmaktadır. Bazen farklı değişkenler için farklı design matrislerine ihtiyaç duyulur. Fakat bu durum mevcut matalelerin konusu dışındadır. Ayrıca burada verilen teorinin gerçek verilerle uygulaması kapsamlı bir biçimde ayrı bir yayın olarak verilecektir.

Kaynaklar

1. Graybill, F.A.: Matrices with Applications in Statistics, Wadworth International Group, California, 1983.
2. Searle, R.S.: Matrix Algebra Useful for Statistics, John & Sons, New York, 1982.
3. Henderson, H.V. and Searle, S.R.: Vec and Vech Operators for Matrices with some uses in Jacobians and Multivariate Statistics, Can. J. of Statist. 1979: 7: 65-81.
4. Thompson, R.: The Estimation of Variance and Covariance with an Application when Records are Subject to Culling. Biometrics, 1973: 29: 527-550.
5. Tracy, D.S. and Dwyer, P.S.: Multivariate Maxima and Minima with Matrix Derivatives. J. Amer. Statist. Assoc. 1969: 64: 1576-1594.
6. Neudecker, H.: Some Theorems on Matrix Differentiation with Special Reference to Kronecker Matrix Products. J. Amer. Statist. Assoc. 1969: 64: 953-963.